This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

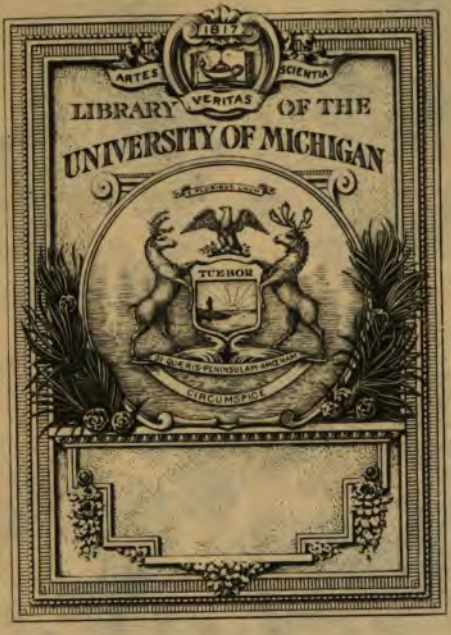
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

QA
35
P5
v.2

L'ALGÈBRE

SELON

SES VRAIS PRINCIPES.

L'ALGÈBRE

SELON

SES VRAIS PRINCIPES,

Ouvrage dans lequel on prouve, par la raison et par le fait, que les principes du Calcul algébrique, usités jusqu'à présent, sont des sources d'erreurs qui conduisent à des résultats faux, diamétralement opposés à ceux de la bonne Algèbre, dont l'on donne les vrais principes.

TOME SECOND.

2 vol. in-8°. br. 6 liv.

Fonds Français

A LONDRES,

Et se trouve à PARIS

Chez Barois l'aîné, Libraire, quai des Augustins.

Et à BESANÇON,

Chez la veuve Charmet, Libraire, Grand'rue.

1789.

Hist of Sci
Stanford
7-16-42
45948
8-14-45 AKK

L'ALGÈBRE

SELON

SES VRAIS PRINCIPES.

DES ÉQUATIONS.

ÉQUATION en algèbre est la double expression d'une même quantité; $7+3=6+4$ est une équation, parce que $7+3$ et $6+4$ sont deux expressions d'une même valeur égales au nombre 10.

Les équations sont les instrumens que l'algèbre emploie pour la résolution des problêmes de mathématiques. Quand elle est parvenue à former une équation dans laquelle l'inconnue occupe seule un membre de l'équation, et les quantités connues le second, telle que $x=7$, le problême est résolu, parce que l'inconnue cesse de l'être, étant égale à une quantité connue. C'est à une pareille équation qu'il faut toujours rappeler en dernière analyse les équations les plus composées.

L'art des équations consiste à les former et à dégager l'inconnue des quantités dont elle est affectée. La formation des équations n'est susceptible d'aucune règle fixe; elle dépend de la manière d'envisager la question, d'en saisir les rapports, n'exprimer que les nécessaires, rejeter les superflus. Il n'en est pas ainsi du dégagement qui est soumis à des règles constantes.

Une inconnue peut être engagée avec d'autres quantités par addition, soustraction, multiplication, division, etc. conjointement ou séparément. Nous donnerons les règles pour dégager l'inconnue, en présentant des exemples simples, parce que dans ceux-ci réside la théorie du calcul, comme dans les plus composés.

Soit $x+3=7$, équation dans laquelle x est engagée par addition du nombre 3. Pour dégager l'inconnue x de ce nombre 3, il est constant qu'il en faudra faire la soustraction dans l'un et l'autre membre, ce qui donnera $x+3-3=7-3$; et parce que $+3-3=0$, et $7-3=4$, on aura pour l'équation réduite et l'inconnue dégagée, $x=4$. Il est certain que par cette opération l'égalité n'est point rompue, la

diminution qui s'est faite dans chaque membre étant la même. Il en est de l'égalité dans les équations, comme de l'équilibre dans une balance, qui se conserve toujours, soit que l'on charge ou que l'on décharge les bassins d'un poids égal de part et d'autre.

Soit $x-3=4$, équation dans laquelle l'inconnue est engagée par voie de soustraction. Pour l'en dégager, on ajoutera $+3$ de part et d'autre, ce qui donnera $x-3+3=4+3$; et parce que $-3+3=0$, et $4+3=7$, on aura, pour l'inconnue dégagée, $x=7$.

Soit $3x=18$, équation dans laquelle x est engagée par voie de multiplication. Pour la dégager, on emploiera l'opération contraire, qui est la division. On divisera en conséquence par le nombre 3 l'un et l'autre membre, ce qui donnera $\frac{3x}{3}=\frac{18}{3}$; et parce que $\frac{3x}{3}=x$, et $\frac{18}{3}=6$, on aura $x=6$, équation dans laquelle x est entièrement dégagée.

Soit $\frac{x}{3}=6$, équation dans laquelle x se trouve engagée par voie de division. Pour en faire le dégagement, on multipliera chaque terme de

l'équation par 3, et il viendra $\frac{3x}{3} = 6 \times 3$; et parce que $\frac{3x}{3} = x$, et $6 \times 3 = 18$, on aura $x = 18$ pour le dégagement de l'inconnue.

Soit $xx = +16$, équation dans laquelle la racine x se trouve engagée dans sa seconde puissance. Pour l'en dégager, on extraira la racine de chaque membre de l'équation, ce qui donnera $x = 4$, inconnue dégagée.

Soit l'équation $\sqrt[3]{x} = +3$, équation dans laquelle x se trouve sous le signe radical cubique. Pour la dégager, on élevera chaque membre à la troisième puissance, et l'on aura $x = 27$ pour l'inconnue dégagée.

Soit $\frac{2}{3}x - 4 = 2x + 6$, équation dans laquelle x se trouve engagée par addition, soustraction, multiplication et division. Pour la dégager, on multipliera les deux membres de l'équation par 3, ce qui donnera $9x - 12 = 6x + 18$. On retranchera $6x$ de part et d'autre; il viendra $3x - 12 = +18$. On ajoutera $+12$ à chaque membre; l'on aura $3x = +30$. Finalement, on divisera chaque membre par 3, et l'on obtiendra $x = +10$, équation dans laquelle x occu-

pant seule le premier membre, se trouve entièrement dégagée.

Les dégagemens ci-dessus sont dans l'ordre positif; les suivans seront dans l'ordre négatif et en suivront les règles; par exemple,

$-x-3=-7$, $-x=-7+3$ et $-x=-7$

$-x+3=-4$ $-x=-4-3$ et $-x=-4$

$-3x=-18$ $-x=-\frac{18}{3}$ et $-x=-6$

$-\frac{x}{3}=-6$ $-x=-6\times 3$ et $-x=-18$

$-xx=-16$ $-x=\sqrt{-16}$ et $-x=-4$

$\sqrt[3]{-x}=-3$ $-x=-3\times 9$ et $-x=-27$

Soit $-\frac{9}{3}x+4=-2x-6$, on aura $-9x+12=-6x-18$. Ajoutant $6x$ de part et d'autre, il vient $-3x+12=-18$; retranchant $+12$ de l'un et l'autre membre, on a $-3x=-30$. Finalement divisant par 3, on trouve $-x=-10$, inconnue dégagée dans une acception contraire à la positive.

Les équations prennent leur dénomination du degré de l'exposant de l'inconnue. Si l'exposant de x est 1, l'équation est du premier degré; si l'exposant est 2, elle est du second, si 3 du troisième, si 4 du quatrième, et ainsi

des autres. Nous traiterons des équations suivant l'ordre de ces exposans.

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

Les équations du premier degré sont celles dont l'exposant de l'inconnue est l'unité. Telles sont les équations précédentes qui ont été proposées toutes formées, pour servir d'exemples au dégagement, mais dont la formation dépend de l'énoncé des questions suivantes.

Trouver un nombre, auquel ayant ajouté 3, la somme soit 7. Supposant ce nombre x, il suffit, pour former l'équation, d'ajouter 3 à la lettre x, et d'égaler cette expression au nombre 7, en cette sorte, $x+3=7$.

Trouver un nombre, duquel ayant retranché 3, la différence soit 4. Pour former l'équation, on retranchera 3 du nombre inconnu x; cette différence égalée à 4, donnera $x-3=4$.

Trouver un nombre, lequel multiplié par 3, le produit donne 18. Pour former l'équation, on multipliera l'inconnu par 3; on égalera le produit à 18, ce qui donnera $3x=18$.

Trouver un nombre, lequel divisé par 3,

donne 6 pour quotient. Pour former l'équation, il suffit d'indiquer la division de x par 3, et égaler l'expression au nombre 6, comme il suit, $\frac{x}{3}=6$.

Pour énoncer ces mêmes équations dans l'ordre négatif, on dira :

Trouver une quantité négative, à laquelle ayant ajouté — 3, la somme soit égale à — 7.

Trouver une quantité négative, de laquelle ayant soustrait — 3, la différence soit égale à — 4.

Trouver une quantité négative, laquelle multipliée par 3, le produit soit — 18.

Trouver une quantité négative, laquelle divisée par — 3, le quotient soit + 6.

Si on demandoit le nombre auquel ayant ajouté + 15, la somme soit + 10, le problême seroit dans l'ordre négatif, et s'écriroit comme il suit, $-x+15=+10$; soustrayant 15 de part et d'autre, on auroit $-x=-15+10$, et $-x=-5$. Résolution aussi réelle et aussi vraie que celle qui résulteroit du problême suivant : Trouver le nombre auquel ayant ajouté 5, la somme soit + 10, on auroit $x+5=+10$, et $x=+5$.

PROBLÊME PREMIER.

Trouver un nombre tel que son double étant retranché de 8, *et ce même nombre étant retranché une seule fois de* 6, *le premier reste soit égal au second.*

RÉSOLUTION.

Soit x le nombre cherché. Son double retranché de 8, donne $8-2x$ pour le premier reste. Le même nombre retranché une seule fois de 6, donne $6-x$ pour second reste. Égalant le second au premier, on formera l'équation $8-2x=6-x$. Ajoutant $2x$ de part et d'autre, il vient $8=6+x$. Retranchant 6 de chaque membre, on a $8-6=x$. Réduisant l'expression, on obtient finalement $x=2$. En effet, le double de 2, qui est 4, étant retranché de 8, le reste est 4. Le même nombre 2 retranché une seule fois de 6, donne 4, second reste égal au premier, comme l'exigent les conditions du problême.

PROBLÊME II.

Trouver un nombre négatif tel que son double étant retranché de -8, *et le même nombre étant retranché une seule fois de* -6, *le second reste soit égal au premier.*

RÉSOLUTION.

Soit $-x$ le nombre inconnu. $-2x$ sera son double, lequel retranché de -8, donnera $-8---2x$ pour premier reste. Le même nombre $-x$ retranché de -6, donnera $-6---x$ pour second reste. Égalant le second au premier, on formera l'équation $-8---2x=-6---x$. Ajoutant $-2x$ de part et d'autre, il vient $-8=-6-x$. Ajoutant $+6$ à chaque membre, on a $-8+6=-x$. Réduisant l'expression, on trouve finalement, $-x=-2$, qui satisfait au problême ; car $-8+4$, premier reste, $=-4$, et $-6+2$, second reste, pareillement $=-4$, comme l'exigent les conditions du problême.

On voit par ces exemples, quoique simples, que l'ordre négatif est susceptible d'un calcul

aussi régulier que l'ordre positif, ce qui est conforme à l'idée que l'on doit se former des quantités négatives, qui ne diffèrent des positives que parce qu'elles doivent être prises dans une acception contraire. Quant à la réalité, elles sont aussi réelles que les positives, la direction du sud au nord étant aussi réelle que la direction du nord au sud, puisque l'on peut prendre indifféremment l'une ou l'autre de ces directions pour positive; et le choix fait, la direction opposée devient négative.

PROBLÈME III.

Partager 25 *en deux parties, telles que la plus grande contienne* 49 *fois la plus petite.*

RÉSOLUTION.

Soit x la plus petite partie, $25 - x$ fera la plus grande; comme la plus grande doit contenir 49 fois la plus petite, divisant la plus grande $25 - x$ par x, on aura $\frac{25-x}{x}$ pour quotient, lequel indiquera combien de fois la plus petite partie x est contenue dans la plus

grande ; et parce qu'elle doit y être contenue 49 fois, on aura l'équation $\frac{25-x}{x} = 49$. Multipliant par x, on a $25-x = 49x$; ajoutant x il vient $25 = 50x$. Divisant par 50 on trouve $\frac{25}{50} = x$; réduisant la fraction à son plus petit dénominateur, on a finalement, $x = \frac{1}{2}$ pour la plus petite des deux parties, et $24\frac{1}{2}$ pour la plus grande, qui contient 49 fois la plus petite $\frac{1}{2}$.

PROBLÊME IV.

Un père qui a trois fils laisse en mourant 1600 *écus à partager, à condition que le premier aura* 200 *écus de plus que le second, que le second aura* 100 *écus de plus que le troisième. On demande quelle doit être la part de chacun?*

RÉSOLUTION.

Soit x la part du troisième. Le second devant avoir 100 écus de plus, sa part sera exprimée par $x+100$. La part du premier, qui doit avoir 200 écus de plus que le second, sera $x+300$. Ces trois parts devant former la somme de 1600 écus, on aura l'équation $3x+$

$400 = 1600$. Soustrayant 400 de chaque membre, on a $3x = 1200$; divisant par 3, on trouve $x = 400$. La part du troisième sera donc de 400 écus, celle du second de 500, et celle du premier de 700; ces trois parts réunies font exactement 1600 écus.

PROBLÊME V.

Trouver un nombre tel que si on y ajoute sa moitié, la somme surpasse 60 d'autant d'unités que le nombre lui-même est surpassé par 65.

RÉSOLUTION.

Soit x le nombre cherché. Si on lui ajoute sa moitié, on aura $x + \frac{1}{2}x$. Par les conditions du problême, il faut qu'il y ait une même différence entre cette somme et 60, qu'entre 65 et le nombre cherché, ce qui donnera cette équation, $x + \frac{1}{2}x - 60 = 65 - x$; ajoutant x dans chaque membre, on a $\frac{3}{2}x - 60 = 65$; ajoutant 60 il vient $\frac{3}{2}x = 125$. Divisant par 5, on trouve $\frac{1}{2}x = 25$. Multipliant par 2, on a $x = 50$, nombre cherché. En effet, si on ajoute à 50 sa moitié, qui est 25, on a 75 qui

surpasse 60 de 15 unités. Si on soustrait le nombre cherché 50 de 65, il reste 15, même différence qu'entre 75 et 60. On voit par là que le nombre cherché 50 ajouté à sa moitié 25, surpasse 60 d'autant d'unités que 50 se trouve surpassé par 65.

PROBLÊME VI.

Un courier est parti de Paris il y a huit heures, et il fait trois lieues en deux heures. On envoie un autre courier après lui qui fait neuf lieues en trois heures. On demande où le second courier atteindra le prēmier?

RÉSOLUTION.

Soit x la distance du point de départ du dernier courier au point de rencontre, c'est-à-dire, le chemin qu'il aura fait pour joindre le premier courier. Il est évident que ce chemin est égal à celui que le premier courier a fait pendant les huit heures d'avance, plus au chemin qu'il a parcouru pendant la course du second. Pour avoir le chemin que le premier a fait pendant huit heures, en parcourant trois lieues en

deux heures, on fera cette proportion, 2 heures : 8 heures : : 3 lieues : 12 lieues.

Pour avoir le chemin qu'a fait le premier courier pendant le temps de la course du second, on cherchera le temps que le second courier a employé à faire le chemin x; et parce que ce second courier fait neuf lieues en trois heures, on fera l'analogie suivante pour avoir l'expression du temps qu'il a employé; $9^{\text{lieues}} : x^{\text{lieues}} : : 3^{\text{heures}} : \frac{3x}{9}^{\text{heures}}$. Ce quatrième terme est l'expression du temps employé à la course du second. Pour trouver le chemin que le premier courier aura fait pendant le temps $\frac{3x}{9}$, on fera l'analogie $2^{\text{heures}} : \frac{3x}{9}^{\text{heures}} : : 3^{\text{lieues}} : \frac{9x}{18}^{\text{lieues}}$.

Ce terme $\frac{9x}{18}$ exprime le chemin que le premier courier a fait pendant le temps $\frac{3x}{9}$ de la course du second. Si on joint les douze lieues d'avance du premier courier au chemin $\frac{9x}{18}$ qu'il a fait pendant le temps de la course du second, on aura le chemin parcouru par le second pour atteindre le premier, ce qui donnera l'équation

$x = 12 + \frac{9x}{18}$, ou $18x = 216 + 9x$. Retranchant $9x$ de part et d'autre, on a $9x = 216$, et divisant par 9, il vient $x = 24$; ce qui indique que le second courier atteindra le premier à vingt-quatre lieues du point de son départ.

PROBLÊME VII.

La somme a *de deux quantités étant donnée, et leur différence* b, *trouver ces quantités.*

1ere RÉSOLUTION.

Soit x la plus grande, y la plus petite. On aura pour leur somme, $x+y=a$, $x-y=b$ pour leur différence. Prenant la valeur de x dans la seconde équation, on a $x=b+y$; substituant cette valeur de x dans la première, il vient $b+y+y=a$, ou $2y=a-b$, et $y=\frac{a-b}{2}$ pour la plus petite des quantités. Substituant dans l'équation primitive $x+y=a$ l'expression $\frac{a-b}{2}$, valeur de y, on aura $x+\frac{a-b}{2}=a$; multipliant par 2, il vient $a-b+2x=2a$, ou $2x=a+b$, et $x=\frac{a+b}{2}$ pour la plus grande.

2e RÉSOLUTION.

Après avoir formé les deux équations $x+y=a$, et $x-y=b$, on ajoutera les deux premiers membres ; on égalera la somme à celle des deux derniers, ce qui donnera $2x=a+b$; divisant par 2, il vient $x=\frac{a+b}{2}$. Pour avoir la plus petite, on retranchera la seconde équation $x-y=b$ de la première $x+y=a$, ce qui donnera $2y=a-b$, et divisant par 2 on a $y=\frac{a-b}{2}$, valeur de la plus petite.

3e RÉSOLUTION.

On extraira de chacune des équations une valeur de x; et des deux valeurs qui en résulteront, on en formera une équation, comme il suit, $x+y=a$, $x-y=b$; extrayant x de part et d'autre, on a $x=a-y$, et $x=b+y$, dont on formera l'équation $a-y=b+y$, ou $2y=a-b$, et $y=\frac{a-b}{2}$ pour la plus foible ; cette expression substituée dans $x+y=a$, donnera $x+\frac{a-b}{2}=a$; multipliant

par 2, il vient $2x+a-b=2a$, ou $2x=a+b$, et $x=\frac{a+b}{2}$ pour la plus forte. Une chose à remarquer dans les équations $x=\frac{a+b}{2}$, et $y=\frac{a-b}{2}$, est que la plus grande des deux quantités est toujours égale à la moitié de la somme plus la moitié de la différence; et que la plus foible y est toujours égale à la moitié de la somme moins la moitié de la différence.

Pour faire une application de ces formules $x=\frac{a+b}{2}$, et $y=\frac{a-b}{2}$ à des cas particuliers, supposons, par exemple, qu'il s'agisse de trouver les valeurs de deux quantités dont la somme est 60, et la différence 10; substituant dans les formules 60 en place de a, et 10 en place de b, on aura $x=\frac{60+10}{2}=\frac{70}{2}=35$ pour la plus grande, et $y=\frac{60-10}{2}=\frac{50}{2}=25$ pour la plus foible.

PROBLÊME VIII.

La somme —a *de deux quantités négatives étant donnée, et leur différence* —b, *trouver ces quantités.*

RÉSOLUTION.

Soit $-x$ la plus grande en nombre d'unités, et $-y$ la plus petite, leur somme sera $-x-y=-a$, et leur différence $-x--y=-b$; ajoutant les premiers membres des deux équations, et égalant leur somme à celle des deux seconds, on aura $-2x=-a-b$, et $-x=-\frac{-a-b}{-2}$ pour la plus grande en nombre d'unités; soustrayant la seconde équation de la première, il viendra $-2y=-a+b$, et $-y=-\frac{-a+b}{-2}$ qui sera la plus petite.

Pour faire l'application de ces formules à des valeurs numériques, supposons qu'on demande quels sont les nombres dont la somme est —60, et la différence —10; faisant —60 $=-a$, et $-10=-b$, on substituera ces nom-

bres dans les formules qui donneront $-x = -\frac{-60-10}{-2} = -\frac{70}{2} = -35$ pour la plus grande en nombre d'unités, et la plus foible en valeur, et $-y = -\frac{-60--10}{-2} = -\frac{50}{2} = -25$ pour la plus petite en nombre d'unités, et la plus forte en valeur; sur quoi il faut observer que plus les quantités négatives augmentent en nombre, plus elles diminuent en valeur; parce que plus elles augmentent en nombre, plus elles effacent d'unités positives, et moins il reste de valeur. Au contraire, plus elles diminuent en nombre, moins elles en détruisent, et plus la valeur augmente. L'expression $+16-4=+12$, qui ne contient que quatre unités négatives, a plus de valeur que l'expression $+16-10=+6$, qui en contient 10, puisque cette dernière n'a que la moitié de la valeur de la première.

PROBLÊME IX.

Deux personnes ont ensemble 216 *liv.*, *la première dépense le tiers de ce qu'elle a, la seconde en dépense le quart, et la somme de leur dépense est de* 64 *liv. On demande combien l'une et l'autre avoient d'argent et combien chacune a dépensé?*

RÉSOLUTION.

Soit x l'argent de la première, y celui de la seconde personne. Par la première condition, $x+y=216$. Par la seconde, $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=64$; extrayant de chaque équation une valeur de x, on a $x=216-y$, et $x=\frac{768-3y}{4}$; égalant ces deux valeurs de x, il vient $216-y=\frac{768-3y}{4}$; multipliant par 4, l'équation se change en $864-4y=768-3y$; ajoutant $4y$ de part et d'autre, on a $864=768+y$, ou $864-768=y$; et $y=96$, argent de la seconde personne. Substituant cette valeur 96 en place de y, dans l'équation $x+y=216$, l'équation

devient $x+96=216$; finalement $x=120$, argent de la première.

Pour vérifier l'opération, on ajoutera 120 à 96, ce qui donnant 216 livres, remplit la première condition. On ajoutera pareillement 40, qui est le tiers de la dépense de la première personne, à 24, qui est le quart de la dépense de la seconde, et la somme 64 remplira la seconde condition.

Si un problême du premier degré renfermoit plus de deux inconnues, après avoir formé autant d'équations qu'il y a d'inconnues, on se conformeroit à la règle générale ci-après.

On prendra dans chaque équation la valeur d'une même inconnue; on égalera l'une de ces valeurs à chacune des autres, et l'on aura une équation et une inconnue de moins. On traitera ces nouvelles équations comme on a traité les premières, et l'on aura encore une équation et une inconnue de moins. On continuera de la même façon, jusqu'à ce qu'on parvienne à n'avoir plus qu'une inconnue.

ÉQUATIONS PURES DU SECOND DEGRÉ.

Les équations pures du second degré sont celles qui ne renferment que les secondes puissances de l'inconnue, comprises sous la formule $xx=aa$.

L'auteur de l'Analyse déterminée, pag. 519 et 520, donne $xx=\frac{c}{a}$ pour formule des équations pures ou incomplètes du second degré, dans laquelle il distingue trois cas; 1°. « quand $\frac{c}{a}$ est un nombre carré, comme dans $xx=144$, qui donne $x=12$; 2°. quand xx n'est pas un carré, comme dans $xx=12$, dans lequel cas il faut se contenter de l'expression $x=\sqrt{12}$, dont la valeur ne peut se déterminer que par approximation; 3°. quand $\frac{c}{a}$ devient un nombre négatif; alors la valeur de x est tout-à-fait impossible et imaginaire; et ce résultat prouve que la question qui a conduit à une telle équation, est impossible d'elle-même. »

Rép. Des trois cas distingués par l'auteur, le premier est le seul vrai et légitime, parce qu'il y a une entière analogie entre le signe

et la chose signifiée. 144 qui est un carré parfait, est exactement représenté par xx, signe représentatif d'un carré rigoureux. Dans le second cas, il est signe représentatif de 12, qui n'est pas un carré, mais un rectangle, lequel ne peut être représenté généralement que par $xy=ab$, ou déterminément par $xy=3\times 4$, équation-produit composée de deux facteurs inégaux, laquelle peut se résoudre en $yx=4\times 3$, raison pour laquelle les équations-produits du second degré sont toujours susceptibles de deux solutions, tandis que les équations-puissances ne sont susceptibles que d'une seule, comme nous le ferons voir en traitant des équations complettes du second degré. Quant au troisième cas, où l'auteur dit, que lorsque $\frac{c}{a}$ devient un nombre négatif, la valeur de x est tout-à-fait impossible et imaginaire, tout esprit juste et exempt de préjugés, ne trouvera pas plus de difficulté à extraire -12 de -144, qu'il en trouveroit à extraire $+12$ de $+144$, l'un et l'autre carré résultant de 12 répétitions de leur racine.

Le même auteur ajoute, « que toutes les fois

qu'il est question d'extraire la racine carrée d'un nombre, cette racine a toujours deux valeurs, dont l'une est positive et l'autre négative. Qu'on ait l'équation $xx = 49$, la valeur de x ne sera pas seulement $+7$, mais aussi -7, ce qu'on indique par ± 7. »

Rép. Le sentiment de l'auteur sur les quantités négatives est, qu'elles sont au dessous de rien, et d'autant plus rien, que le nombre est plus grand; ainsi -12 est six fois plus rien que -2. Cela étant, la valeur de x dans l'exemple proposé, $x = \pm 7$, a deux valeurs, l'une qui est de 7 unités au dessus de rien, l'autre de 7 unités au dessous, qui ont les unes et les autres la propriété de résoudre la même question. On a peine à comprendre comment on a pu parvenir à faire recevoir des suppositions si contraires à la raison; comment on a pu se familiariser avec des racines imaginaires, nombres impossibles, et cependant de la plus grande utilité, parce que, dit on, elles sont des signes d'insolubilité d'un problême; tandis qu'il n'y a rien de plus faux, et qu'elles ne servent qu'à déshonorer l'algèbre, et inspirer des terreurs paniques aux calculateurs.

PROBLÊME PREMIER.

Trouver un nombre dont la moitié multipliée par le tiers fasse 24.

RÉSOLUTION.

Soit ce nombre x, sa moitié est $\frac{1}{2}x$, son tiers $\frac{1}{3}x$. Multipliant $\frac{1}{2}x$ par $\frac{1}{3}x$, on aura $\frac{1}{6}xx$; et parce que ce produit doit égaler 24, on formera l'équation $\frac{1}{6}xx = 24$. Multipliant par 6, on a $xx = 144$; extrayant la racine, on trouve $x = +12$, rien de plus.

L'auteur de l'Analyse déterminée, dont ce problême est extrait, donne $x = \pm 12$. Il ajoute, que si on prend $x = -12$, sa moitié sera -6, et son tiers -4, dont le produit est également 24. Erreur de principe dont il faut se garantir, parce que le produit est -24, résultat de -6 par $+4$, multiplicateur positif. La vérité de ce produit -24 se prouve, parce qu'il est de même espèce algébrique que son multiplicande -6, et que tout produit doit être de même espèce que son multiplicande.

PROBLÊME II.

On demande le nombre dont la moitié multipliée par le tiers fasse — 24?

RÉSOLUTION.

Puisque l'on demande un produit négatif, la racine ne peut être que négative. Soit donc l'inconnue $-x$, sa moitié sera $-\frac{1}{2}x$, et son tiers $-\frac{1}{3}x$. Pour former le produit de ces deux quantités, on changera le signe — du second facteur en signe +, afin d'avoir un multiplicateur abstrait positif, ce qui donnera $-\frac{1}{2}x \times \frac{1}{3}x = -\frac{1}{6}xx$; et parce que ce produit doit égaler — 24, on formera l'équation $-\frac{1}{6}xx = -24$. Multipliant par 6, on a $-xx = -144$. Extrayant la racine de chaque membre, il vient finalement $-x = -12$, qui remplit les conditions du problême. La moitié de — 12 est — 6, le tiers est — 4, lequel en qualité de multiplicateur, devient + 4, et multipliant — 6, donne pour produit — 24, comme il étoit proposé.

PROBLÊME III.

On cherche un nombre tel qu'en y ajoutant 5 *et en en retranchant* 5, *le produit de la somme par la différence soit* $= 96$.

RÉSOLUTION.

Soit ce nombre x. Si on y ajoute 5, on a $x+5$; si on en retranche 5, on a $x-5$; le produit de ces deux quantités devant égaler 96, on aura l'équation $xx - 25 = 96$; ajoutant 25, on a $xx = 121$. Extrayant la racine, il vient $x = 11$, nombre qui, en lui ajoutant 5, donne 16; et en en retranchant 5, donne 6, dont le produit 16×6 est 96, selon les conditions du problême.

PROBLÊME IV.

On cherche un nombre tel qu'en y ajoutant -5 *et en en retranchant* -5, *le produit de la somme par la différence soit égal à* -96.

RÉSOLUTION.

Soit ce nombre $-x$. Si on y ajoute -5, on a $-x-5$; si on en retranche -5, on a $-x--5$;

le produit de ces deux quantités devant égaler -96, on aura l'équation $-x-5\times+x-5$, ou $-xx+25=-96$. Retranchant $+25$ de part et d'autre, on a $-xx=-121$; et extrayant la racine, il vient $-x=-11$, valeur requise; car si on ajoute -5 à -11, on a -16, et si on retranche -5 de -11, on a -6, dont on changera le signe pour former le produit $-16\times+6$ qui est $=-96$, comme l'exige l'énoncé du problême.

PROBLÊME V.

Trouver un nombre tel qu'en l'ajoutant à 10, *la somme multipliée par la différence donne* 51.

RÉSOLUTION.

Par l'énoncé du problême, on a $10+x\times10-x=51$, ou $100-xx=51$. Ajoutant xx et retranchant 51, on trouve $xx=49$; extrayant la racine, on a $x=7$ pour le nombre cherché, lequel ajouté à 10, donne 17, et étant soustrait de 10, donne 3. En effet, $17\times3=51$, selon les conditions requises.

PROBLÊME VI.

Trouver un nombre tel qu'en l'ajoutant à -10 *et le retranchant de* -10, *la somme multipliée par la différence donne* -51.

RÉSOLUTION.

Soit $-x$ le nombre cherché, lequel étant ajouté à -10, la somme sera $-10-x$, et étant retranché de -10, la différence donnera $-10--x$, dont on changera les signes pour en former le multiplicateur, et les facteurs du produit seront $-10-x$ et $+10-x$, lesquels multipliés, donneront $-100+xx$, que l'on égalera à -51 pour former l'équation $-100+xx=-51$; ajoutant $+51$, l'équation devient $-49+xx=0$; ajoutant $-xx$ à chaque membre, on a $-49=-xx$; extrayant les racines, on trouve $-x=-7$, nombre cherché; car si on l'ajoute à -10, on aura -17, et si on le soustrait de -10, on aura -3, dont on changera le signe pour former le produit $-17\times3=-51$, comme il étoit proposé.

PROBLÊME VII.

Deux personnes ont gagné un certain nombre de louis. Le gain du premier multiplié par le gain du second, donne 96, et si l'on fait le carré des deux gains, leur somme est 208. On demande quel est le gain d'un chacun?

RÉSOLUTION.

Soit $2x$ la somme inconnue des gains, $2z$ leur différence, a le produit 96 des deux gains, $2b$ la somme 208 des carrés. Le gain du premier supposé, le plus grand sera $x+z$, et celui du second $x-z$. La somme de leurs carrés sera $2xx+2zz=2b$, et divisant par 2, on a $xx+zz=b$, d'où l'on tire $zz=b-xx$, première valeur de zz. Le gain du premier multiplié par celui du second devant égaler 96, on aura $xx-zz=a$, ou $zz=xx-a$, seconde valeur de zz.

Comparant ces deux valeurs de zz, on a l'équation $b-xx=xx-a$, ou $2xx=b+a$; divisant par 2, il vient $xx=\frac{b+a}{2}$; extrayant la racine, on trouve $x=\sqrt{\frac{b+a}{2}}$; substituant

la valeur des lettres, on a $x = \sqrt{\frac{104+96}{2}}$, ou $x = 10$; substituant cette valeur de x dans l'équation $zz = xx - a$, il vient $zz = 100 - 96$, ou $zz = 4$, dont la racine est $z = 2$. Le gain du premier $x+z$ sera donc $10+2$, ou 12 louis; et le gain du second $x-z$ sera $10-2$, ou 8 louis, valeurs conformes aux conditions requises, puisque le gain 12 du premier multiplié par le gain 8 du second, donne 96, et la somme de leurs carrés $144+64 = 208$, comme il étoit proposé.

PROBLÊME VIII.

Deux personnes ont perdu un certain nombre de louis; la perte du premier multipliée par la perte du second fait — 96, *et la somme de leurs carrés* — 208. *On demande quelle est la perte d'un chacun exprimée par la diminution de leur argent?*

RÉSOLUTION.

Puisque la perte est opposée au gain, si celui-ci est exprimé par x, la perte s'exprimera par $-x$.

Soit donc $-2x$ la somme inconnue des deux pertes, $-2z$ leur différence, $-a$ le produit -96 des deux pertes, $-2b$ la somme -208 de leurs carrés. La perte de la première personne sera $-x+-z$, ou $-x-z$ moitié de la somme des pertes, plus la moitié de leur différence. La perte de la seconde sera $-x--z$ moitié de la somme des pertes, moins la moitié de leur différence. Pour faire le carré de la première perte, on multipliera $-x-z$ par $+x+z$, multiplicateur positif, ce qui donnera $-xx-2xz-zz$; et pour faire le carré de la perte du second, on multipliera $-x+z$ par $+x-z$, ce qui donnera $-xx+2xz-zz$. On fera la somme de ces deux carrés, dont on extraira $-zz=-b+xx$, première valeur de $-zz$.

Pour avoir une seconde valeur de $-zz$, on fera le produit des deux pertes, en multipliant $-x-z$ par $+x-z$; d'où l'on extraira $-zz=-xx+a$, seconde valeur de $-zz$.

On comparera les deux valeurs de $-zz$ pour en former une équation dans laquelle il n'y aura que des x et des quantités connues, comme

on le voit dans l'équation ci-après, $-xx+a = -b+xx$. On fera passer $+xx$ du second membre dans le premier, et la lettre $+a$ passera du premier membre dans le second, ce qui change l'équation en $-2xx = -a-b$, et divisant chaque membre par -2, il vient $-xx = -\frac{-a-b}{-2}$. Il faut faire attention que l'expression $-\frac{-a-b}{-2}$ est la même que $-\frac{+a+b}{+2}$ relativement au diviseur, puisque dans la division + dans + et — dans — donnent toujours +, ce qui indique qu'un quotient quelconque est toujours positif, et que le signe — qui le précède est un signe d'opération qui en indique la soustraction.

On poursuivra l'opération comme on la voit dans le tableau ci-après, qui représente la marche des opérations pour la résolution du septième problême, tant dans l'ordre positif que dans l'ordre négatif.

Ordre positif.

$+x+z$ 1er. gain. $+x-z$ 2e gain.

$+x+z$ $+x-z$

$+xx+2xz+zz$ carré. $+xx-2xz+zz$

$+xx-2xz+zz$ carré.

$+2xx$ $+2zz$ somme des carrées $=+2b$

$+zz=+b-xx$ 1ere. valeur de $+zz$

$+x+z$

$+x-z$ multiplicateur positif.

$+xx+xz$

$-xz-zz$

$+xx$ $-zz$ produit des deux gains.

$+xx-zz=+a$

$+xx-a=+zz$

$+zz=+xx-a$ 2e valeur de $+zz$

$+xx-a=+b-xx$ valeurs comparées.

$+2xx=+a+b$

$$+xx=+\frac{+a+b}{+2}$$

$$+x=\sqrt{+\frac{+a+b}{+2}}$$

$$+x=\sqrt{+\frac{+104+96}{+2}}=\sqrt{+\frac{200}{2}}=\sqrt{100}=+10$$

$+zz=+xx-a=+100-96=+4$

$+z=+2$

$+x+z=+10+2=+12$ gain du 1er.

$+x-z=+10-2=+8$ gain du 2e.

Ordre négatif.

$-x-z$ 1ere. perte. $-x+z$ 2e perte.

$+x+z$ $+x-z$

$-xx-2xz-zz$ carré. $-xx+2xz-zz$

$-xx+2xz-zz$ carré.

$-2xx \quad -2zz$ somme des carrées $= -2b$

$-zz = -b+xx$ 1ere. valeur de $-zz$

$-x-z$

$+x-z$ multiplicateur positif.

$-xx-xz$

$+xz+zz$

$-xx \quad +zz$ produit des deux pertes.

$-xx+zz = -a$

$-xx+a = -zz$

$-zz = -xx+a$ 2e valeur de $-zz$

$-xx-a = -b+xx$ valeurs comparées.

$-2xx = -a-b$

$$-xx = -\frac{-a-b}{-2}$$

$$-x = \sqrt{-\frac{-a-b}{-2}}$$

$$-x = \sqrt{-\frac{-104-96}{-2}} = \sqrt{-\frac{-200}{-2}} = \sqrt{-100} = -10$$

$-zz = -xx+a = -100+96 = -4$

$-z = -2$

$-x-z = -10-2 = -12$ perte du 1er.

$-x+z = -10+2 = -8$ perte du 2e.

On observera dans le tableau ci-dessus, 1°. l'opposition diamétrale qui se trouve entre chaque terme de l'ordre négatif, et chaque terme correspondant de l'ordre positif. 2°. Que les multiplicateurs positifs, tant des puissances que des produits, sont communs à l'un et à l'autre ordre, le multiplicateur $+x+z$ ayant servi à former le carré de $+x+z$ et de $-x-z$; d'où il suit que ceux qui disent que pour former un carré, il faut multiplier la quantité par elle-même, se trompent évidemment, puisque au lieu de la multiplier par elle-même, il faut la multiplier dans l'ordre négatif par une quantité diamétralement opposée à elle-même. 3°. Que les racines imaginaires résultantes des puissances paires négatives, sont aussi réelles que celles qui résultent des puissances paires positives. $\sqrt{-100}=-10$, étant aussi réelle que $\sqrt{+100}=+10$.

ÉQUATIONS COMPLÈTES DU SECOND DEGRÉ.

Les équations simples $x=a$, $x=a$ et $x=b$, $y=c$ étant données, si l'on fait passer leurs second membres dans le premier, elles se

changeront en $x - a = 0$, $x - a = 0$, et en $x - b = 0$, $y - c = 0$. Multipliant les deux premières l'une par l'autre, on aura $xx - 2ax - - aa = 0$, équation-puissance, dont la racine unique est $x - a$, multiplicande.

Si on multiplie $x - b$ par $y - c$, on aura l'équation-produit $xy - by - - bc = 0$. Dans $- cx$ ces deux équations les coefficiens $- 2a$ de la première et $- b - c$ de la seconde, expriment la somme des deux facteurs, et les troisièmes termes aa de la première et bc de la seconde, en expriment le produit. Comme les coefficiens du second terme et les troisièmes termes sont toujours connus, nous extrairons de cette propriété une formule pour la résolution des équations du second degré après les observations ci-après.

On trouve dans le premier volume de l'Analyse démontrée, pag. 64, les formules suivantes pour les équations du second degré.

1ere.

$$x - a = 0 \times x - b = 0$$
$$xx - ax + ab = 0$$
$$- bx$$

2e.

$$x+a=0\times x+b=0$$
$$xx+ax+ab=0$$
$$+bx$$

3e.

$$x-a=0\times x+b=0$$
$$xx-ax-ab=0$$
$$+bx$$

On observera dans ces formules, 1°. que l'auteur ayant fait $x=a$, fait encore $x=b$, ce qui ne peut être vrai qu'en supposant $b=a$; car si $b=x$ et $a=x$, donc $b=a$. Deux choses égales à une troisième sont égales entre elles. Si on dit que x peut représenter une grandeur quelconque, cela n'est vrai qu'antérieurement à sa détermination; mais après sa détermination, lorsqu'elle a été fixée à représenter a dans une opération, elle ne peut plus représenter b dans le même produit, selon les loix primitives du calcul : xx ne seroit pas un carré si la première x valoit 4 et la seconde 3; et si xx n'est pas un carré, n'est-ce pas induire en erreur

que de lui en donner la forme et l'expression?

2°. La seconde formule $x+a=0\times x+b=0$ est nécessairement fausse, ou faussement exprimée; parce qu'il est impossible que deux quantités positives puissent être égales à zéro. Si l'on dit que x est censée négative, pourquoi la laisser subsister avec le signe positif? car toute lettre algébrique qui n'est précédée d'aucun signe, est censée avoir le signe +. N'est-il pas mieux et plus décidé d'écrire $-x+b=0$, que d'écrire $x+b=0$, toute lettre qui exprime une négative devant nécessairement être précédée de son signe négatif?

Nous observerons encore que dans le premier exemple $xx-ax+ab$, le troisième terme $+ab$ $\begin{matrix}-bx\end{matrix}$ qui exprime un carré positif résultant du produit des facteurs $-a$ par $-b$, est une expression fausse, quoique la valeur soit vraie, parce que pour former le produit de $-a$ par $-b$, il faut dire, $-a$ par b donne $-ab$; et comme il en faut faire la soustraction, on le fait précéder du signe — en cette sorte, $--ab$, expression non équivoque et égale en valeur à $+ab$, mais dont la signification est bien diffé-

rente, $---ab$ indiquant la soustraction du produit négatif $-ab$, tandis que $+ab$ signifie le produit positif de $+a$ par $+b$. Erreur qui a fasciné les yeux de tous les algébristes qui la regardoient comme la preuve la plus triomphante du faux principe que — par — donne +, parce que dans le produit de $x-a$ par $x-b$ qui est $xx-2ax---ab$, le troisième terme devoit nécessairement avoir une valeur positive; mais s'ils avoient fait attention que la soustraction d'une quantité négative faisoit le même effet et donnoit la même valeur que la positive $+ab$, ils auroient vu pour lors l'insuffisance de la démonstration.

PROBLÊME GÉNÉRAL.

La somme s *de deux quantités et leur produit* p *étant donnés, déterminer la formule qui fasse trouver chacune des quantités.*

RÉSOLUTION.

Soit d leur différence. La plus grande, que je nomme x, sera $\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}d$, et la moindre, que

j'appelle y, sera $\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}d$; leur produit $\frac{1}{4}ss-\frac{1}{4}dd=p$, et $\frac{1}{4}dd=\frac{1}{4}ss-p$. Extrayant la racine, on a $\frac{1}{2}d=\sqrt{\frac{1}{4}ss-p}$. Ce dernier membre est l'expression de la moitié de la différence des quantités, laquelle ajoutée à la moitié de la somme, donne la plus grande, et en étant retranchée donne la plus petite; ainsi la formule qui fera trouver les quantités, sera

$$x=\tfrac{1}{2}s+\sqrt{\tfrac{1}{4}ss-p}$$
$$y=\tfrac{1}{2}s-\sqrt{\tfrac{1}{4}ss-p}$$

Nous allons appliquer à la formule ci-dessus les différens cas dont les équations du second degré sont susceptibles.

1er. Cas. Soit $x+y=9$, $xy=18$. Substituant dans la formule 9 en place de s, et 18 en place de p, on aura pour le premier cas,

$$x=\tfrac{9}{2}+\sqrt{\tfrac{81}{4}-18}=\tfrac{9}{2}+\tfrac{3}{2}=6$$
$$y=\tfrac{9}{2}-\sqrt{\tfrac{81}{4}-18}=\tfrac{9}{2}-\tfrac{3}{2}=3$$

2e Cas. Soit $x+y=-7$, $xy=-12$. Substituant dans la formule -7 en place de s, et -12 en place de p, on aura pour le second cas,

$$x=-\tfrac{7}{2}+\sqrt{-\tfrac{49}{4}--12}=-\tfrac{7}{2}-\tfrac{1}{2}=-4$$
$$y=-\tfrac{7}{2}-\sqrt{-\tfrac{49}{4}--12}=-\tfrac{7}{2}+\tfrac{1}{2}=-3$$

3e Cas. Soit $x+y=+3$, $xy=-10$. Subs-

tituant dans la formule $+3$ en place de s, et -10 en place de p, on aura

$$x = +\tfrac{3}{2} + \sqrt{\tfrac{9}{4} - -10} = +\tfrac{3}{2} + \tfrac{7}{2} = +5$$
$$y = +\tfrac{3}{2} - \sqrt{\tfrac{9}{4} - -10} = +\tfrac{3}{2} - \tfrac{7}{2} = -2$$

4e Cas. Soit $x+y=-3$, $xy=10$. Substituant dans la formule -3 en place de s, et 10 en place de p, on aura

$$x = -\tfrac{3}{2} + \sqrt{-\tfrac{9}{4} - 10} = -\tfrac{3}{2} - \tfrac{7}{2} = -5$$
$$y = -\tfrac{3}{2} - \sqrt{-\tfrac{9}{4} - 10} = -\tfrac{3}{2} - -\tfrac{7}{2} = +2$$

5e Cas. Soit $x+y=12$, $xy=36$. Substituant dans la formule 12 en place de s, et 36 en place de p, on aura

$$x = 6 + \sqrt{\tfrac{1}{4}144 - 36} = +6+0 = 6$$
$$y = 6 - \sqrt{\tfrac{1}{4}144 - 36} = +6-0 = 6$$

Le premier cas de la formule donne deux quantités positives; le second deux quantités négatives; le troisième une quantité positive et une quantité négative, la positive étant plus forte en nombre d'unités que la négative; le quatrième une quantité négative et une positive, la négative étant plus forte en nombre d'unités que la positive; le cinquième deux quantités égales. Les quatre premiers cas appartiennent aux équations-produits dont les facteurs sont

inégaux; et le cinquième aux équations-puissances dont les facteurs sont identiques.

Pour rapprocher la forme de ces équations de celle qui est en usage, on multipliera $x-6=0$ par $x'-3$; le produit donnera l'équation $xx'-9x--18=0$. On a mis un trait sur la seconde x, qui vaut 3, pour la distinguer de la première, qui vaut 6; d'où il suit que xx' n'est pas un carré, puisqu'il résulte de $6\times 3=18$; et des neuf x qui composent le second terme, il y en a six qui valent 3, et trois qui valent 6. Pour résoudre cette équation, on laissera xx' seule dans le premier membre, ce qui donnera $xx'=9x-18$. On fera ensuite s de la formule $=9, p=18$; la substitution de ces valeurs dans la même formule donnera pour le premier cas :

1er. Cas.

$$x=\tfrac{9}{2}+\sqrt{\tfrac{81}{4}-18} \qquad x'=\tfrac{9}{2}-\sqrt{\tfrac{81}{4}-18}$$

$$x=\tfrac{9}{2}+\sqrt{\tfrac{81}{4}-\tfrac{72}{4}} \qquad x'=\tfrac{9}{2}-\sqrt{\tfrac{81}{4}-\tfrac{72}{4}}$$

$$x=\tfrac{9}{2}+\sqrt{\tfrac{9}{4}} \qquad x'=\tfrac{9}{2}-\sqrt{\tfrac{9}{4}}$$

$$x=\tfrac{9}{2}+\tfrac{3}{2} \qquad x'=\tfrac{9}{2}-\tfrac{3}{2}$$

$$x=\tfrac{12}{2} \qquad x'=\tfrac{6}{2}$$

$$x=6 \qquad x'=3$$

2e Cas.

On multipliera $-x+4=0$ par $x'-3$; on aura pour produit $-xx'+7x-12$, dont on formera l'équation $-xx'=-7x---12=0$. Pour la résoudre, on fera $s=-7$, et $p=-12$; la substitution donnera

$$-x=-\tfrac{7}{2}+\sqrt{-\tfrac{49}{4}--12} \qquad x'=-\tfrac{7}{2}-\sqrt{-\tfrac{49}{4}--12}$$

$$-x=-\tfrac{7}{2}+\sqrt{-\tfrac{49}{4}+\tfrac{48}{4}} \qquad x'=-\tfrac{7}{2}-\sqrt{-\tfrac{49}{4}+\tfrac{48}{4}}$$

$$-x=-\tfrac{7}{2}+\sqrt{-\tfrac{1}{4}} \qquad x'=-\tfrac{7}{2}-\sqrt{-\tfrac{1}{4}}$$

$$-x=-\tfrac{7}{2}-\tfrac{1}{2} \qquad x'=-\tfrac{7}{2}+\tfrac{1}{2}$$

$$-x=-\tfrac{8}{2} \qquad x'=-\tfrac{6}{2}$$

$$-x=-4 \qquad x'=-3$$

3e Cas.

On multipliera $x-5=0$, équation multiplicande, par le multiplicateur $x+2$, sans égaler ce dernier à zéro, en écrivant $x+2=0$, comme on le voit dans plusieurs livres d'algèbre, parce qu'il suffit d'un seul facteur égal à zéro pour rendre le produit $=0$. La multiplication de $x-5=0$, par $x+2$, donnera pour produit $xx-3x---10=0$, dont on formera l'équation $xx=3x-10$. Pour la ré-

soudre, on fera $s = 3$ et $= 10 = p$; substituant ces valeurs dans la formule, on aura

$$x = \tfrac{3}{2} + \sqrt{\tfrac{9}{4} - -10} \qquad x' = \tfrac{3}{2} - \sqrt{\tfrac{9}{4} - -10}$$

$$x = \tfrac{3}{2} + \sqrt{\tfrac{9}{4} - -\tfrac{40}{4}} \qquad x' = \tfrac{3}{2} - \sqrt{\tfrac{9}{4} - -\tfrac{40}{4}}$$

$$x = \tfrac{3}{2} + \sqrt{\tfrac{49}{4}} \qquad x' = \tfrac{3}{2} - \sqrt{\tfrac{49}{4}}$$

$$x = \tfrac{3}{2} + \tfrac{7}{2} \qquad x' = \tfrac{3}{2} - \tfrac{7}{2}$$

$$x = \tfrac{10}{2} \qquad x' = -\tfrac{4}{2}$$

$$x = 5 \qquad x' = -2$$

4e Cas.

On multipliera $x - 2 = 0$, par $x' + 5$; il viendra pour produit $xx' + 3x - 10$, dont on formera l'équation $xx' = -3x + 10$. Pour la résoudre, on fera $s = -3$, $p = 10$; substituant ces valeurs dans la formule, on aura

$$x = -\tfrac{3}{2} + \sqrt{-\tfrac{9}{4} - 10} \qquad x' = -\tfrac{3}{2} - \sqrt{-\tfrac{9}{4} - 10}$$

$$x = -\tfrac{3}{2} + \sqrt{-\tfrac{9}{4} - \tfrac{40}{4}} \qquad x' = -\tfrac{3}{2} - \sqrt{-\tfrac{9}{4} - \tfrac{40}{4}}$$

$$x = -\tfrac{3}{2} + \sqrt{-\tfrac{49}{4}} \qquad x' = -\tfrac{3}{2} - \sqrt{-\tfrac{49}{4}}$$

$$x = -\tfrac{3}{2} - \tfrac{7}{2} \qquad x' = -\tfrac{3}{2} - -\tfrac{7}{2}$$

$$x = -\tfrac{10}{2} \qquad x' = +\tfrac{4}{2}$$

$$x = -5 \qquad x' = +2$$

5e Cas.

On multipliera $x - 6 = 0$ par $x - 6$; ce

qui donnera pour produit $xx - 12x = -36$, dont on formera l'équation $xx = 12x - 36$. Pour résoudre l'équation, on fera $s = 12$, $p = 36$; substituant ces valeurs dans la formule, on aura

$x = \frac{12}{2} + \sqrt{\frac{144}{4} - 36}$ $\quad$ $x = \frac{12}{2} - \sqrt{\frac{144}{4} - 36}$

$x = \frac{12}{2} + \sqrt{\frac{144}{4} - \frac{144}{4}}$ $\quad$ $x = \frac{12}{2} - \sqrt{\frac{144}{4} - \frac{144}{4}}$

$x = \frac{12}{2} + 0$ $\quad$ $x = \frac{12}{2} - 0$

$x = 6$ $\quad$ $x = 6$

La table suivante renferme les équations relatives aux cinq cas énoncés ci-dessus.

1er. Cas. $xx' = +9x - 18$. Deux quantités positives $+6$ et $+3$.

2e Cas. $xx' = -7x - -12$. Deux quantités négatives -4 et -3.

3e Cas. $xx' = +3x - 10$. Une positive $+5$ et une négative -2.

4e Cas. $xx' = -3x + 10$. Une négative -5 et une positive $+2$.

5e Cas. $xx = +12x - 36$. Deux quantités égales $+6$ et $+6$.

Il faut spécialement observer dans la formule $x = \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}ss - p}$ qui a servi à la résolution des cas précédens, que $\frac{1}{2}s$ exprime la moitié de la somme des facteurs, et $\sqrt{\frac{1}{4}ss - p}$ en exprime la

différence, comme il en conste par la formation de la formule, où ayant supposé d égal à la différence des deux quantités données, la moitié de leur différence a été $\frac{1}{2}d = \sqrt{\frac{1}{4}ss - p}$. D'où il suit que la formule de résolution ci-dessus est l'expression de ce théorème si utile : *La moitié de la somme de deux quantités plus la moitié de leur différence donne la plus grande, et la moitié de la somme moins la moitié de leur différence donne la plus petite.* Cette propriété remarquable est le principe de la résolution des équations de tous les degrés, comme on le verra dans la suite.

On ne doit jamais perdre de vue, qu'un produit quelconque ne contient que le multiplicande répété ; conséquemment qu'on ne peut en extraire le multiplicateur qui ne s'y trouve pas. Mais parce que le multiplicateur peut devenir multiplicande d'un second produit égal au premier, on peut, en qualité de multiplicande, l'extraire de ce second produit. Par exemple, il est impossible d'extraire du produit $4\times3=4+4+4$ le multiplicateur 3, qui n'y est pas et ne peut y être, ses unités étant

héthérogènes à celles du multiplicande, quand même celles-ci seroient des unités abstraites, parce qu'elles ne seroient pas des unités de fois, unités qui distinguent celles du multiplicateur de toute autre espèce d'unités. Mais parce que 3 peut devenir multiplicande du produit $3 \times 4 = 3+3+3+3$, on peut l'extraire du produit 12 égal au premier, en qualité de multiplicande, mais jamais en qualité de multiplicateur, raison pour laquelle on obtient deux solutions dans les équations du second degré, lorsque les facteurs étant inégaux donnent une équation-produit. Mais si les facteurs sont égaux, il en résulte une équation-puissance, dont on ne peut obtenir qu'une solution, ou deux identiques, c'est-à-dire, une répétition de la même. En effet, d'un rectangle on extrait deux côtés inégaux considérés successivement comme multiplicande, et d'un carré, on ne peut extraire que des côtés égaux et identiques qui se réduisent séparément à une même et unique valeur.

Nous commencerons la résolution des équations complettes du second degré, par celles qui se trouvent dans la première édition du Dictionnaire Encyclopédique, au mot *équation.*

PROBLÊME PREMIER.

Trouver un nombre x *tel que le carré de ce nombre* $+15$ *soit égal à* 8 *fois le nombre cherché.*

RÉSOLUTION.

Soit x le nombre cherché, son carré sera xx, auquel ajoutant 15 la somme doit égaler $8x$, ce qui donnera l'équation $xx+15=8x$. Faisant passer $8x$ dans le premier membre, on a $xx-8x+15=0$, équation-produit qui donne $xx=8x-15$. Pour la résoudre, on fera usage de la formule; en substituant 8 en place de s, et 15 en place de p, on aura $x=4+1=5$, et $y=4-1=3$, valeurs requises qui satisfont au problême. En effet, ajoutant 15 à 25, carré de 5, on a 40 égal à 8 fois 5; ajoutant 15 à 9, carré de 3, on a 24 égal à 8 fois 3, selon les conditions du problême.

L'auteur de l'article *équation* du Dictionnaire Encyclopédique ne résout point l'équation-produit $xx-8x+15=0$, il résout l'équation-puissance $xx-8x+16=16-15$, de laquelle on ne peut extraire que $x=+5$; ce n'est qu'à

la faveur du double signe abusif $\pm\sqrt{16}-15$, que l'auteur obtient $x=+3$. De plus, l'addition du carré de la moitié du coefficient, à chaque membre de l'équation-produit, en change nécessairement l'espèce, en transformant un rectangle qui a deux côtés inégaux en un carré parfait, dont tous les côtés étant égaux, on n'en peut extraire que des valeurs égales, et non pas des valeurs inégales, telles que $+5$ et $+3$.

PROBLÊME II.

Trouver un nombre x *plus petit que* 1, *et tel que le carré de* $1-x$ *soit égal à* $\frac{1}{4}$.

RÉSOLUTION.

L'expression du problême est $(1-x)^2=\frac{1}{4}$. Pour ordonner l'équation, on changera les signes des deux membres, et l'on aura $(x-1)^2=-\frac{1}{4}$. Effectuant l'opération indiquée du premier membre, elle se changera en $xx-2x+1=-\frac{1}{4}$, équation-puissance dont on extraira la racine unique $x-1=\sqrt{-\frac{1}{4}}$ qui donnera pour valeur de l'inconnue $x=1+\sqrt{-\frac{1}{4}}$ ou $x=1-\frac{1}{2}$, et finalement $x=\frac{1}{2}$ qui résout le problême con-

formément à son énoncé, puisque $\frac{1}{2}$ est plus petit que 1, et que le carré de $\frac{1}{2}$ est égal à $\frac{1}{4}$.

PROBLÊME III.

Trouver un nombre x *plus grand que* 1 *et tel que* $(x-1)^2=\frac{1}{4}$.

RÉSOLUTION.

L'expression du problême est $(x-1)^2=\frac{1}{4}$. Effectuant le carré indiqué du premier membre, on a $xx-2x--1=\frac{1}{4}$; extrayant la racine de part et d'autre, il vient $x-1=\frac{1}{2}$. Ajoutant l'unité à chaque membre, on a $x=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}$, ou $x=\frac{3}{2}$; valeur qui satisfait aux conditions requises, puisque $\frac{3}{2}$ est plus grand que 1, et que le carré de $\frac{3}{2}-1$ ou de $\frac{1}{2}$ est égal à $\frac{1}{4}$.

Rien de plus simple ni de plus naturel que la résolution des deux problêmes précédens. Nous allons voir comment le double signe $\pm$ de la formule ordinaire des équations du second degré, va embrouiller la matière et mettre à la torture le génie de l'auteur.

« Si l'on proposoit, dit-il, de trouver un « nombre x plus petit que 1, et tel que le carré

« de $1 - x$ fût égal à $\frac{1}{4}$, on auroit $(x-1)^2 = \frac{1}{4}$,
« et $1 - x = \pm\frac{1}{2}$; donc $x = \frac{1}{2}$, et $x = \frac{3}{2}$. Voilà
« deux racines réelles et positives; cependant
« il n'y a, à proprement parler, que la racine
« $\frac{1}{2}$ qui satisfasse au problême; car la racine
« $\frac{3}{2}$ donne $1 - x = -\frac{1}{2}$, quantité négative. Or
« l'on suppose dans l'énoncé que x est plus
« petit que 1, pourquoi donc trouve-t-on une
« autre racine réelle et positive? »

La réponse est bien facile. On trouve une autre racine parce qu'elle y a été mise, très mal à propos, par l'addition du signe — à la formule qui ne doit porter que le signe +.

« Si on eût proposé ce problême : Trouver un
« nombre x plus grand que 1, et tel que $(x-1)^2$
« soit égal à $\frac{1}{4}$, on auroit eu précisément la même
« équation que celle qui est donnée par la solu-
« tion du problême précédent, et en ce cas,
« $x = \frac{1}{2}$ auroit été la vraie valeur de l'inconnue;
« ainsi l'équation $1 - 2x + xx = \frac{1}{4}$ représente
« réellement ces deux ci : $(1-x)^2 = \frac{1}{4}$, et
« $(x-1)^2 = \frac{1}{4}$, qui sont la traduction algé-
« brique de deux questions très différentes dans
« leur énoncé. »

RÉP. On ne conçoit pas comment deux équations, dont le second membre de l'une donne $+\frac{1}{4}$, et le second membre de l'autre $-\frac{1}{4}$, peuvent être précisément la même équation. Or on a vu que $(1-x)^2=\frac{1}{4}$ se résolvoit en $(x-1)^2=-\frac{1}{4}$; donc les équations $(x-1)^2=-\frac{1}{4}$ et $(x-1)^2=\frac{1}{4}$ sont deux équations opposées qui ne peuvent être représentées par l'équation $1-2x+xx=\frac{1}{4}$.

« Donc quoique les racines d'une équation « soient toutes deux réelles et positives, il ne « s'ensuit pas toujours qu'elles résolvent toutes « exactement et rigoureusement la question; « mais elles la résolvent en la présentant en « deux sens différens, dont l'algèbre ne peut « exprimer la différence. Par exemple, dans « le cas dont il s'agit, l'énoncé devoit être : « Trouver une grandeur x, telle que la retran- « chant de l'unité, ou retranchant l'unité d'elle, « le carré du reste soit égal à $\frac{1}{4}$. »

RÉP. On a vu, par la résolution des deux problêmes précédens, que les valeurs réelles et positives $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$ ont résolu exactement et rigoureusement la question proposée, en les

présentant chacune dans le vrai sens qu'elles doivent avoir, dont l'algèbre sait très bien distinguer la différence. Par exemple, dans le cas dont il s'agit, l'énoncé ne devoit pas être, Trouver une grandeur x, telle que la retranchant de l'unité, ou retranchant l'unité d'elle, le carré du reste soit égal à $\frac{1}{4}$, parce que l'algèbre ne confond pas l'actif avec le passif, le contenant avec le contenu; mais elle exprime très bien la différence des quantités qui en ont et en doivent avoir. Par exemple, si on retranche $\frac{1}{2}$ de l'unité, et l'unité d'un $\frac{1}{2}$, elle dit que le carré du premier reste est $+\frac{1}{4}$, et celui du second $-\frac{1}{4}$; et sa réponse est celle de la vérité, parce que le carré de $-\frac{1}{2}$ est $-\frac{1}{4}$, et non $+\frac{1}{4}$.

« Plusieurs algébristes regardent cette généralité comme une richesse de l'algèbre, qui, disent-ils, répond non seulement à ce qu'on lui demande, mais encore à ce qu'on ne lui demandoit pas, et qu'on ne songeoit pas à lui demander. Pour moi je ne puis m'empêcher d'avouer que cette richesse prétendue me paroît un inconvénient. »

RÉP. Cette réflexion est très juste et très judicieuse ; mais l'algèbre n'a aucune part à cet inconvénient qui émane d'un principe qu'elle ne reconnoîtra jamais pour lui appartenir ; à savoir, *moins* par *moins* donne *plus*. Principe contradictoire dont l'existence est impossible.

« Les racines négatives, je le répète, sont « un inconvénient, sur-tout lorsqu'elles sont « mêlées avec les positives ; mais il y a bien « de l'apparence qu'on ne parviendra jamais « à lever cet inconvénient ; peut-être pourroit-« on le diminuer si on avoit une bonne mé-« thode de résoudre les équations. »

RÉP. Nous espérons que le contenu de cet ouvrage sera le terme de pareils inconvéniens, et que la méthode de résoudre les équations qu'il renferme en sera la preuve.

« Si on proposoit de trouver un nombre x, « tel que $(x+1)^2+4=0$, on auroit $x=-1$ « $+\sqrt{-4}$ et $x=-1-\sqrt{-4}$, valeurs ima-« ginaires qui indiquent que l'énoncé de la « question est absurde, et qu'il n'est pas pos-« sible de la résoudre. »

RÉP. Il n'y a aucune absurdité dans l'énoncé

de la question; mais il y en auroit une à prétendre, que l'algèbre est insuffisante à sa résolution; car soit l'équation proposée $(x+1)^2+4=0$. Si on transporte $+4$ dans le second membre, en changeant son signe, on a l'équation-puissance $(x+1)^2=-4$; extrayant la racine de part et d'autre, il vient $x+1=-2$; dégageant l'inconnue de l'unité dont elle est affectée, on a finalement $x=-3$, valeur réelle et non imaginaire, qui résout parfaitement l'équation proposée. Pour faire la preuve, il suffit de substituer -3 en place de x dans l'équation $(x+1)^2=-4$, qui donnera $(-3+1)^2=-4$; expression qui se réduit en dernière analyse à $-2=-2$, équation parfaite qui démontre que l'énoncé de la question n'étoit point absurde; et le problême, bien loin d'être impossible, est très facile à résoudre.

Dans l'équation-puissance $(x+1)^2=-4$, la valeur numérique -2 est racine unique, parce qu'une équation-puissance ne peut jamais se résoudre en d'autres équations dont la racine de chacune ne soit pas identique. Il n'en est pas des équations-puissances comme des équations-

produits, qui peuvent se résoudre en autant d'équations différentes qu'elles ont de facteurs, et dont chacun est racine de son équation particulière, parce qu'une équation composée n'est autre chose qu'un produit, et qu'un produit n'a jamais qu'un multiplicande. Il n'est donc pas surprenant que l'auteur de l'article *équation* du Dictionnaire Encyclopédique se soit trouvé très embarrassé dans la résolution des *équations-puissances* $(1-x)^2=\frac{1}{4}$ et $(x-1)^2=\frac{1}{4}$, en prétendant extraire deux racines de chaque équation-puissance, lesquelles n'en ont jamais qu'une et n'en peuvent avoir qu'une, soit dans l'ordre positif, soit dans l'ordre négatif.

Supposons, par exemple, $(1-x)^2=-\frac{1}{4}$, équation-puissance négative. Si on extrait la racine de part et d'autre, on aura $1-x=-\frac{1}{2}$; dégageant l'inconnue, il vient $-x=-\frac{1}{2}$ et $1-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$, racine unique dont le carré est $-\frac{1}{4}$.

On voit par là la superfluité et la fausseté du double signe $\pm$ dans les formules de résolution des équations du second degré, qui occasionne des méprises très désagréables dans les calculs astronomiques.

Les problêmes suivans sont extraits de l'Analyse déterminée de M. Euler, chapitre VI *de la résolution des équations mixtes du second degré.*

M. Euler donne pour formule générale de résolution des équations du second degré, $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp+q}$. Cette formule est défectueuse, 1°. en ce que le double signe $\pm$ qui précède le radical, suppose qu'une même puissance positive peut résulter également d'une racine positive ou d'une négative, quoique la seconde soit destructive de la première; 2°. en ce qu'elle rend positif le carré de $-\frac{1}{2}p$, en écrivant $\sqrt{\frac{1}{4}pp}$ au lieu de $\sqrt{-\frac{1}{4}pp}$; ensorte que pour la rendre conforme aux règles de la véritable algèbre, il faut écrire $x = -\frac{1}{2}p - \sqrt{-\frac{1}{4}pp-q}$ pour la quantité positive, et $x' = -\frac{1}{2}p + \sqrt{-\frac{1}{4}pp-q}$ pour la quantité négative.

Le procédé de M. Euler qui fait le carré de $-\frac{1}{2}p = \frac{1}{4}pp$, est une conséquence du faux principe que $-par-donne+$. Mais comme toute puissance paire ou impaire doit toujours être de l'espèce algébrique de sa racine, la seconde puissance de $-\frac{1}{2}p$ doit nécessairement être $-\frac{1}{4}pp$.

PROBLÊME PREMIER.

Trouver deux nombres dont l'un surpasse l'autre de 6, *et dont le produit soit* 91.

RÉSOLUTION.

Soit x le plus petit nombre. Le plus grand, qui doit le surpasser de six unités, sera $x+6$; leur produit donnera $xx+6x$; et parce que ce produit doit égaler 91, on formera l'équation $xx+6x=91$, ou $xx=-6x+91$. Pour résoudre cette équation, on fera dans la formule générale qui est $x=\frac{1}{2}s+\sqrt{\frac{1}{4}ss-p}$, et y ou $x'=\frac{1}{2}s-\sqrt{\frac{1}{4}ss-p}$, la lettre s de la formule $=-6$, et $p=91$, en changeant le signe $+$ qui précède le radical en signe $-$ pour avoir une valeur positive dans le premier membre. La substitution de ces valeurs en place des lettres donnera $x=-3-\sqrt{-9-91}=-3-\sqrt{-100}=-3--10=+7$ pour le plus petit nombre, auquel ajoutant $+6$, on aura $+13$ pour le plus grand, lequel, selon les conditions du problême, doit surpasser de six unités le plus petit. Faisant le produit de $+13$ par $+7$,

on trouve + 91, produit conforme à l'énoncé du problême.

Si l'on eût laissé subsister dans la formule le signe + qui précède le radical, on eût eu $x = -3 + \sqrt{-9-91} = -3 + \sqrt{-100} = -3 + -10 = -13$ pour la première quantité, et y ou $x' = -3 - \sqrt{-9-91} = -3 - -10 = +7$ pour la seconde, qui répond à la seconde partie de la formule. On voit par là que le changement du signe + qui précède le radical a été fait pour avoir la quantité positive +7 la première, selon les conditions, à laquelle ayant ajouté +6, on a obtenu +13 pour la plus grande de même espèce algébrique que la plus foible +7.

M. Euler donne pour seconde solution du problême, les nombres − 13 et − 7, dont le produit −91 étant diamétralement opposé à + 91, produit positif conforme aux conditions exigées dans le problême, il s'ensuit que les nombres − 13 et − 7, facteurs du produit négatif − 91, ne peuvent résoudre la question proposée, qui exige dans son énoncé que le produit des deux nombres soit positif.

PROBLÊME II.

Trouver un nombre tel que si de son carré on retranche 9, *il vienne un nombre qui soit d'autant d'unités plus grand que* 100, *que le nombre cherché est plus petit que* 23.

RÉSOLUTION.

Soit x le nombre cherché. Si de son carré on retranche 9, on aura $xx - 9$, et parce que cette quantité doit surpasser 100, comme 23 surpasse x; soustrayant 100 de la première et x de la seconde, on formera de ces deux différences l'équation $xx - 109 = 23 - x$. Laissant xx seule dans le premier membre, on a $xx = -1x + 132$. Pour résoudre l'équation, on fera dans la formule $s = -1$, $p = 132$, et l'on changera le signe + qui précède le radical en signe —; la substitution de ces nombres donnera $x = -\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{1}{4} - 132}$ ou $x = -\frac{1}{2} - -\frac{23}{2} = \frac{22}{2} = 11$. Donc $x = 11$, valeur requise; car si de son carré 121 on retranche 9, il vient 112 qui surpasse 100 de 12, comme 11 est surpassé de 12 par 23.

L'auteur de l'Analyse déterminée, de qui les problêmes ci-dessus sont extraits, donne — 12 pour seconde valeur de x, et prétend que — 12 satisfait à une seconde solution de la question proposée, tandis qu'il n'y a rien de plus facile que de se convaincre du contraire; car si du carré de — 12 qui est — 144, on ôte + 9; ou pour parler plus strictement, si on prend la différence additionnelle de — 144 à + 9, on aura — 153 qui doit surpasser 100 d'autant d'unités que — 12 est surpassé par 23, suivant les conditions proposées; et parce qu'il est impossible que — 153 puisse surpasser 100, il est donc impossible que — 12 puisse résoudre la question proposée.

Comme il n'y a point de produit de — par —, si l'on veut représenter le carré de — 12 par ses produisans, on écrira — 12 × + 12, ce qui signifie — 12 répété 12 fois, = — 144, par la raison que — 12 répété 10 fois, donne — 120 unités négatives; car on ne conçoit pas comment 12 répété 2 fois de plus, changeroit l'espèce de ses unités négatives, et donneroit + 144 au lieu de — 144.

PROBLÊME III.

Trouver un nombre tel que si on multiplie sa moitié par son tiers, et qu'au produit on ajoute la moitié du nombre qu'on cherche, le résultat soit 30.

RÉSOLUTION.

Soit x le nombre cherché, sa moitié sera $\frac{1}{2}x$, son tiers $\frac{1}{3}x$, dont le produit est $\frac{1}{6}xx$; si on ajoute à ce produit la moitié du nombre cherché, on aura $\frac{1}{6}xx+\frac{1}{2}x$. Cette somme devant égaler 30, on formera l'équation $\frac{1}{6}xx+\frac{1}{2}x=30$; multipliant par 6, il vient $xx+3x=180$; laissant xx seule dans le premier membre, on a $xx=-3x+180$. Pour résoudre cette équation on fera dans la formule générale $s=-3$, $p=180$, et l'on changera le signe $+$, qui précède le radical, en signe $-$, comme dans les problêmes précédens. La substitution des nombres en place des lettres, donnera $x=-\frac{3}{2}-\sqrt{-\frac{9}{4}-180}=-\frac{3}{2}-\sqrt{-\frac{729}{4}}=-\frac{3}{2}-\frac{27}{2}=+\frac{24}{2}=+12$. Donc $x=12$, nombre qui satisfait aux conditions du problême; en effet,

la moitié de 12 est 6, son tiers est 4; le produit de 6 par 4 est 24, auquel ajoutant 6, moitié du nombre cherché, la somme donne 30, comme il étoit proposé.

L'auteur des problêmes ci-dessus donne pour seconde solution de cette dernière question le nombre — 15 qui n'y satisfait pas ni ne peut y satisfaire, comme on va le prouver. La moitié de — 15 est $-7\frac{1}{2}$, le tiers de — 15 est — 5, que l'on changera en + 5 pour avoir un multiplicateur abstrait positif, et les facteurs du produit de la moitié du nombre cherché par son tiers, seront $-7\frac{1}{2}$ et + 5, dont le produit sera $-37\frac{1}{2}$; à quoi ajoutant $-7\frac{1}{2}$, moitié du nombre cherché — 15, on trouve — 45 au lieu de 30 qu'exigent les conditions du problême. Pour déterminer la différence entre le vrai nombre 30 et le faux nombre — 45, on prendra la différence additionnelle entre + 30 et — 45, qui est + 75, différence entre + 30, nombre vrai, et — 45, nombre faux, erreur considérable.

PROBLÈME IV.

Trouver deux nombres qui soient en proportion double, et tels que si on ajoute leur somme à leur produit, on obtienne + 90.

RÉSOLUTION.

Soit x le premier de ces nombres, le second qui est double du premier sera $2x$; le produit de l'un par l'autre sera $2xx$ et la somme $3x$. Comme la somme ajoutée au produit doit égaler + 90, on formera l'équation $2xx + 3x = 90$; divisant par 2, il vient $xx + \frac{3}{2}x = 45$; laissant xx seule dans le premier membre, on aura $xx = -\frac{3}{2}x + 45$ pour l'équation à résoudre. A cet effet on fera dans la formule générale $s = -\frac{3}{2}$, $p = 45$, et l'on changera en — le signe + qui précède le radical. Cette substitution donnera $x = -\frac{3}{4} - \sqrt{-\frac{9}{16} - 45} = -\frac{3}{4} - \sqrt{-\frac{729}{16}} = -\frac{3}{4} - -\frac{27}{4} = \frac{24}{4} = 6$ pour le premier nombre cherché; le second, qui doit être double du premier, sera nécessairement 12. Pour en faire la preuve, on fera le produit de 12 par 6, qui est 72, auquel on ajoutera 18, somme des deux

nombres cherchés, laquelle donnant 90, selon les conditions du problême, prouve la bonté de l'opération.

L'auteur de l'Analyse déterminée donne encore deux autres nombres qu'il pense satisfaire également à la question : ces nombres sont -15 pour le plus foible en valeur, et $-7\frac{1}{2}$ pour le plus fort; mais il est facile de prouver le contraire, et combien ils sont éloignés d'y satisfaire; car en faisant le produit de ces deux nombres, on trouve $-112\frac{1}{2}$, à quoi ajoutant leur somme $-22\frac{1}{2}$, le résultat au lieu de donner 90, selon les conditions requises du problême, donne -135, valeur bien éloignée de 90, la différence étant de 225 unités positives.

Nous n'extrairons pas un plus grand nombre d'exemples de l'Analyse déterminée, il y en a suffisamment pour faire voir que la formule de M. Euler $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp+q}$, est une source d'erreurs, tant à cause du double signe qui précède le radical, qu'à cause du carré positif $\frac{1}{4}pp$, qui doit être nécessairement négatif et de l'espèce algébrique de sa racine $-\frac{1}{2}p$.

Les problêmes suivans sont extraits du Cours de Mathématiques de Bézout, à l'usage de la marine, part. III, pag. 133.

PROBLÊME PREMIER.

Trouver un nombre tel que si à son carré, on ajoute 8 *fois ce même nombre, le tout fasse* 33.

RÉSOLUTION.

Soit x le nombre cherché, son carré sera xx, auquel ajoutant $8x$, on formera l'équation $xx+8x=33$, ou $xx=-8x+33$; pour la résoudre, on fera dans la formule $s=-8$, $p=33$, et l'on changera le signe $+$ qui précède le radical en signe $-$, ce qui donnera $x=-4-\sqrt{-16-33}=-4-\sqrt{-49}=-4-7=+3$, nombre demandé; car si à son carré, qui est 9, on ajoute 8 fois 3, qui font 24, on obtient 33 qui remplit les conditions proposées.

M. Bézout ne résout pas l'équation $x^2+8x=33$ que la construction du problême lui a donnée, il transforme $x^2+8x=33$, équation-produit, en équation-puissance $x^2+8x+16=49$, dont il extrait abusivement à la faveur du double

signe $\pm$, les nombres $+3$ et -11. De ces deux nombres, le premier satisfait seul à la question proposée, selon M. Bézout; le second est donc une valeur superflue, totalement étrangère au problême, preuve évidente de l'unité de racine dans une équation-puissance. Le problême a été proposé dans l'ordre positif; nous allons le proposer dans l'ordre négatif.

PROBLÊME II.

Trouver un nombre tel que si à son carré on ajoute 8 *fois ce même nombre, le tout fasse* — 33.

RÉSOLUTION.

Soit $-x$ le nombre cherché, son carré sera $-xx$, auquel ajoutant $-8x$, on formera l'équation $-xx-8x=-33$, ou $-xx=--8x-33$. Faisant dans la formule $s=-8$, $p=33$, on aura $-x=--4+\sqrt{-16-33}=--4+\sqrt{-49}=+4-7=-3$ qui résout le problême. Le carré de — 3 est — 9, 8 fois — 3 donne — 24, dont la somme — 9 — 24 fait exactement — 33.

PROBLÊME III.

On devoit partager 175 *liv. entre un certain nombre de personnes; mais il y en a deux d'absentes, et qui, par cette raison, ne doivent pas avoir part. Cette circonstance augmente de* 10 *liv. la part de chaque présent. On demande combien il devoit d'abord y avoir de partageans?*

RÉSOLUTION.

Soit x le nombre de ceux qui devoient partager. Comme il y en a deux d'absentes, et par cette raison exclues du partage, le nombre effectif des partageans sera $x - 2$. Si on divise 175 par x, l'expression $\frac{175}{x}$ indiquera la part que chaque personne auroit eue si elles eussent été toutes présentes. Si on divise 175 par $x - 2$, le quotient $\frac{175}{x-2}$ exprimera la part effective des personnes présentes, et parce que cette part est plus forte de 10 livres que celle exprimée par $\frac{175}{x}$, augmentant cette dernière de 10, on formera l'équation $\frac{175}{x-2} = \frac{175}{x} + 10$. Multipliant

par x, on a $\frac{175x}{x-2} = 175+10x$. Cette équation multipliée par $x-2$, donnera $175x = 175x+10xx-350-20x$; supprimant $175x$ de part et d'autre, il vient $0 = 10xx-20x-350$, ou $10xx = 20x--350$; divisant par 10, on obtient finalement $xx = 2x--35$.

Pour résoudre cette équation, on fera dans la formule $s=2$, $p=-35$, ce qui donnera $x = 1+\sqrt{1--35} = 1+\sqrt{36} = 1+6 = 7$. Donc si on ôte 2 unités de 7 qui représente le nombre de ceux qui devoient partager, il restera 5 qui indiquera le nombre effectif de ceux qui ont partagé et ont reçu chacun 35 liv. pour leur part, qui eût été réduite à 10 livres de moins, c'est-à-dire à 25 livres, si les absens eussent été présens.

M. Bézout au lieu de résoudre l'équation-produit $xx-2x=35$, que la construction du problême lui a donnée, résout l'équation-puissance $x^2-2x+1=36$, qu'elle ne donne pas, et trouve pour résultat final $x = \pm 6+1$, dont il obtient $x=7$, $x=-5$, deux valeurs opposées en espèce et en nombre d'unités; aussi l'auteur ajoute-t-il que le premier nombre 7

résout seul la question, et que — 5 en résout une autre, ce qui confirme ce que nous avons avancé, que d'une équation-puissance on ne peut jamais obtenir qu'une seule solution et une seule réponse à une question proposée.

PROBLÊME IV.

Un homme achète un cheval qu'il vend au bout de quelque temps pour 24 pistoles; à cette vente il perd autant pour cent que le cheval lui avoit coûté. On demande combien il l'avoit acheté?

RÉSOLUTION.

Soit x le prix de l'achat du cheval. Comme le marchand perd autant pour cent que le cheval lui a coûté, en soustrayant de 100 la valeur x, prix de l'achat, on aura $100-x$ qui exprimera la perte qu'il fait sur 100. Pour avoir celle qu'il fait sur x, on fera cette analogie, $100:100-x::x:\frac{100x-xx}{100}$, réduction du prix du cheval; et parce que cette réduction est égale à 24 pistoles, on aura l'équation $\frac{100x-xx}{100}=24$;

multipliant par 100, on a $100x - xx = 2400$; changeant tous les signes, il vient $xx - 100x = -2400$, ou $xx = 100x - 2400$.

Faisant dans la formule $s = 100$, $p = 2400$, on aura par la substitution $x = 50 + \sqrt{2500 - 2400}$ et $y = 50 - \sqrt{2500 - 2400}$, ou $x = 50 + 10$, $y = 50 - 10$, finalement $x = 60$, et $y = 40$; solution double résultante de l'équation-produit $xx = 100x - 2400$, la même que celle de M. Bézout à laquelle il ne satisfait pas, mais qu'il transforme en équation-puissance $xx - 100x + 2500 = 2500 - 2400$, dont il extrait $x = 50 \pm 10$, ce qui donne, suivant l'auteur, ces deux valeurs $x = 60$ et $x = 40$, tandis que l'équation-puissance n'en peut donner qu'une.

Les deux valeurs 60 et 40 que l'on a obtenues de l'équation-produit $xx = 100x - 2400$, satisfont l'une et l'autre aux conditions du problême; car en supposant que le cheval a été vendu 60 pistoles, 100 se trouve réduit à 40, et l'on a $100 : 40 :: 60 : 24$. Si on suppose que le cheval a été vendu 40 pistoles, alors 100 étant réduit à 60 donnera cette analogie, $100 : 60 :: 40 : 24$. On voit par là que les deux valeurs trouvées

60 et 40 satisfont également aux conditions du problême; mais l'énoncé de la question n'est pas suffisant pour déterminer lequel de ces deux prix a eu lieu.

M. Bézout ajoute que si on supposoit 26 pistoles au lieu de 24, le problême seroit insoluble. La raison qu'il en donne est l'impossibilité de pouvoir extraire la racine d'une quantité négative, telle que $\sqrt{-100}$; mais on a pu voir le contraire dans vingt endroits de cet ouvrage, où l'on a extrait, avec autant de raison que de facilité, -10 de $\sqrt{-100}$, comme l'on extrait $+10$ de $\sqrt{+100}$. Ce n'est donc pas la racine imaginaire $\sqrt{-100}$ qui est la cause de l'insolubilité, mais l'absurdité de la supposition. C'est en effet une chose absurde de supposer qu'une quantité puisse surpasser son *maximum :* or telle est la supposition que l'on fait, lorsque l'on propose de résoudre l'équation $xx-100x+2600=0$, laquelle renferme un excès de *maximum* dans le troisième terme, lequel représentant le produit de deux parties de 100, ne peut surpasser 2500, le plus grand de tous les produits que l'on peut

faire avec deux parties quelconques de 100.

Pour saisir plus facilement cette vérité, supposons qu'on propose de diviser 10 en deux parties, dont le produit soit 26. On demande une chose impossible, parce que le *maximum* de deux parties quelconques de 10 est 25; car si l'on prend 9 et 1 pour les deux parties de 10, le produit sera 9; si on prend 8 et 2, le produit sera 16; si 7 et 3, le produit sera 21; si 6 et 4, le produit sera 24; si 5 et 5, le produit donnera 25 pour le plus grand de tous les produits de deux parties quelconques de 10. Celui donc qui propose de diviser 10 en deux parties, dont le produit soit égal à 26, propose une chose absurde et impossible. Pour reconnoître cette absurdité dans une équation ordonnée du second degré, sans avoir recours aux imaginaires, il suffit d'examiner si le troisième terme surpasse le carré de la moitié du coefficient du second terme; s'il le surpasse, l'équation est fausse et le problême insoluble. Les équations ci-après sont de cette espèce.

EXEMPLES

d'équations fausses du second degré, qui contiennent des excès de maximum.

$$x^2+1x+1=0$$
$$x^2+cx+cc=0$$
$$x^2+2x+3=0$$
$$x^2+5x+12=0$$
$$x^2+7x+25=0$$
$$x^2+(g+h)x+g^2+h^2-gh=0$$

Toute équation du second degré réduite et ordonnée, dont le troisième terme surpasse le carré de la moitié du coefficient du second terme, est une équation fausse et insoluble ; en voici la raison : Le troisième terme de l'équation exprime le produit des deux facteurs ; le coefficient du second terme en exprime la somme ; mais le carré de la moitié de cette somme est le *maximum* des produits : le troisième terme qui représente un de ces produits, ne peut donc jamais surpasser le carré de la moitié du coefficient, sans rendre l'équation fausse et insoluble : tel seroit le problême où l'on de-

manderoit de construire un cercle dont le rayon surpassât le diamètre.

La méthode usitée, pour résoudre les équations du second degré consiste à transformer les équations-produits en équations-puissances, ensuite à extraire une seule racine du premier membre de l'équation transformée, et deux racines contraires du second membre; à savoir, une positive et une négative indiquées par le double signe $\pm$ qui précède le radical de la formule. Par exemple, on propose de résoudre l'équation $xx+8x-33=0$, équation-produit du second degré, parce que le premi er membre n'est pas une puissance parfaite. Pour transformer cette équation-produit en équation-puissance, on fait passer le troisième terme -33 du premier membre dans le second, ce qui donne $xx+8x=+33$; et comme le premier membre n'est pas une puissance parfaite, on le rend tel en lui ajoutant le carré 16, qui est celui de la moitié de 8, coefficient du second terme. On fait la même addition dans le second membre pour ne point troubler l'égalité, ce qui donne l'équation-puissance xx

$+8x+16=+16+33$; ensuite on extrait du premier membre la racine $x+4$, tandis que du second membre on en extrait deux représentées par le double signe $\pm\sqrt{49}$, ce qui signifie $+7$ et -7, deux valeurs opposées et insociables, qui ne peuvent exister dans un même produit sans se détruire : après quoi on dégage l'inconnue, et l'on obtient pour résultat final $x=-4\pm\sqrt{49}$, ce qui signifie $x=+3$, et $x=-11$, comme si 11 unités négatives et 3 unités positives pouvoient résoudre la même question.

Il est donc évident que lorsqu'on transforme une équation-produit en équation-puissance, on ne résout point le problême dans toute son étendue, puisqu'une équation-puissance n'étant composée que d'une seule racine, et n'étant susceptible que d'une transformation identique, ne peut donner qu'une même réponse à une question proposée. Si la question en exige deux, l'équation-produit les donne ; c'est pourquoi lorsqu'on propose un problême du second degré à résoudre, si la construction immédiate du problême donne une équation-puissance, on est assuré que la question n'exige qu'une

réponse et ne peut avoir qu'une solution. Si au contraire la construction immédiate du problême donne une équation-produit, la question est suceptible de deux solutions. C'est donc dénaturer le problême, que de transformer l'équation-produit, que sa construction a donnée, en équation-puissance, comme on le pratique, puisque le problême auquel on peut satisfaire par deux solutions, n'est pas le même que celui auquel on ne peut satisfaire que par une seule. On peut se rappeler l'embarras dans lequel l'auteur de l'article *équation* du Dictionnaire Encyclopédique s'est trouvé, pour avoir voulu extraire deux valeurs de l'inconnue dans les équations-puissances.

OBSERVATIONS.

Nous n'avons employé pour la résolution des équations du second degré, que la formule $x = \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}ss - p}$, $y = \frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}ss - p}$, dont la première partie exprime la moitié de la somme des deux facteurs de l'équation, plus la moitié de leur différence. La seconde exprime la moitié de la même somme, moins la moitié de la

même différence. C'est cette même formule mise sous la forme $x = \sqrt[r]{\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{ss}{4} - p^r}} + \sqrt[r]{\frac{s}{2} - \sqrt{\frac{ss}{4} - p^r}}$ qui servira à la résolution des équations de tous les degrés. Elle suppose une seule racine dans une équation quelconque, mais elle la suppose divisée en deux parties et égale à un binome; par exemple, $x = m + n$.

La multiplicité des racines répugne à la nature des équations composées, comme la multiplicité des multiplicandes répugne à la nature des produits, parce que les équations composées sont de véritables produits dans lesquels un seul facteur fait la fonction de multiplicande ou de racine, les autres facteurs remplissent les fonctions de multiplicateurs sans faire partie du produit, ses unités étant des unités de fois entièrement hétérogènes à celles du multiplicande.

Cependant tous les livres d'algèbre disent le contraire, et prétendent que l'équation $x^3 - 7x + 6 = 0$ a trois racines, deux positives et une négative; savoir, $+2$, $+1$ et -3, procédé erroné qui vient d'avoir donné à une lettre

déterminée trois significations différentes, et avoir fait $x=a, x=b, x=c$, au lieu de $x=a$, $y=b$, $z=c$. En effet, quand une lettre a reçu sa détermination et se trouve fixée à représenter a, elle ne peut plus représenter une autre quantité b, sans rendre identique les quantités qu'elle représente, puisque l'on auroit $a=x$, $b=x$, et l'on concluroit donc $b=a$, deux quantités égales à une troisième étant égales entre elles. Il est donc évident que lorsque x est déterminée à représenter le multiplicande a, il faut une autre lettre pour représenter le multiplicateur; et parce que chaque facteur peut faire successivement les fonctions de multiplicande, il s'ensuit que les facteurs $+2$, $+1$, -3 répondent aux trois équations $x^3-7x+6=0$, $y^3=7y+6=0$, $z^3-7z+6=0$, ce que la substitution de chaque racine dans chaque équation particulière confirme, d'une manière évidente, en donnant pour la substitution de la racine 2, l'équation numérique $8-14+6=0$, qui répond à l'équation algébrique $x^3+7x+6=0$. La substitution de la racine $+1$ donne l'équation numérique $+1-7+6=0$, qui répond à

$y^3 - 7y + 6 = 0$. La substitution de la racine -3 donne $-27 - -21 + 6 = 0$, équation numérique qui répond à l'équation algébrique $-z^3 + 7z + 6 = 0$. On voit clairement par cette exposition, que ce n'est pas une seule équation qui a trois racines, ce qui représenteroit un monstre à trois têtes, mais trois équations qui ont chacune la leur.

Auxpreuves que nous avons données de l'unité de racine dans une équation quelconque, nous ajouterons la suivante.

Résoudre une équation, c'est ramener l'inconnue à être seule dégagée, et au premier degré dans le premier membre, tandis que les quantités connues forment le second : or une inconnue seule dégagée, et qui est au premier degré dans le premier membre, ne peut avoir qu'une racine, puisque les problêmes du premier degré n'en ont jamais qu'une, suivant tous les algébristes. Donc une équation quelconque n'a jamais qu'une racine.

On regrette le temps que les algébristes ont employé à vouloir forcer l'algèbre à leur accor-

der dans une équation autant de racines que de facteurs, et qui n'ont obtenu que des racines étrangères, dont la majeure part sont imaginaires, parce que leur demande étoit déraisonnable. Les exemples ci-après, extraits de différens auteurs, en sont une preuve convaincante.

M. Sauri, dans le premier volume de son Cours de Mathématiques, pag. 266, s'exprime de la manière suivante : « Soit une équation « du troisième degré $x^3 - 1 = 0$. Cette équa- « tion étant divisible par $x - 1 = 0$, et le quo- « tient étant $x^2 + x + 1 = 0$, dont les racines sont « $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, l'on aura pour les trois racines « cubiques de l'unité, $1, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$. »

R. Des trois racines assignées, la seule vraie, légitime et approuvée par l'algèbre, est l'*unité;* les deux autres $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ qui résultent de la fausse équation $x^2 + x + 1 = 0$, bien loin d'exprimer des racines vraies, n'expriment que des racines absurdes. En effet, le troisième terme de l'équation du second degré $x^2 + x + 1 = 0$, qui est 1, est un excès de

maximum, qui excède le *maximum* $\frac{1}{4}$, carré de la moitié du coefficient du second terme de $\frac{3}{4}$ d'unité ; en voici la raison. Le troisième terme de l'équation exprime le produit des deux facteurs ; mais ce troisième terme est l'unité, et le coefficient du second terme est encore l'unité qui exprime la somme des facteurs : or il est impossible de diviser cette dernière unité en deux parties, dont le produit soit plus grand que $\frac{1}{4}$. Donc le troisième terme 1 ou $\frac{4}{4}$ qui représente un de ces produits, excède le *maximum* $\frac{1}{4}$ de $\frac{3}{4}$ d'unité. Il est donc évident qu'une équation du second degré, dont le troisième terme surpasse le carré de la moitié du coefficient, est une équation fausse et absurde ; aussi les imaginaires qui en dérivent sont-elles des quantités impossibles et chimériques.

Formules extraites des Élémens d'algèbre de M. Clairaut, page 205. Équation proposée $ax^3 = b$. Première racine réelle $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. Seconde racine, mais imaginaire, $-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \sqrt{-\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}}$. Troisième racine imaginaire $-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} - \sqrt{-\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}}$. Ces racines imaginaires procèdent de la fausse

équation $xx+cx+cc=0$, dans laquelle on a substitué $\frac{b}{a}=c^3$; mais il est visible que l'équation $xx+cx+cc=0$ contient un excès de maximum, puisque le maximum étant $\frac{1}{4}cc$, carré de la moitié du coefficient, il se trouve surpassé par cc ou $\frac{4}{4}cc$ de $\frac{3}{4}cc$.

Formules extraites du Cours de M. Bézout à l'usage de la marine, pag. 227, 3e partie. Équation proposée $y^3-1=0$. Première racine réelle 1. Seconde racine imaginaire $\frac{1-+\sqrt{-3}}{2}$. Troisième racine imaginaire $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$. Ces racines imaginaires procèdent de la fausse équation $y^2+y+1=0$, dont l'excès sur le maximum est de $\frac{1}{4}$ d'unité.

Formules extraites de l'Analyse déterminée, pag. 606. Équation proposée $x^3-x-6=0$. Première racine réelle 2. Seconde racine imaginaire $-1+\sqrt{-2}$. Troisième racine imaginaire $-1-\sqrt{-2}$. Ces racines imaginaires procèdent de la fausse équation $xx+2x+3=0$, dans laquelle le *maximum* 1 est surpassé de 2 unités positives. Ce sont donc ici, dit M. Euler, les deux autres racines de notre équation, les-

quelles sont, comme on le voit, impossibles ou imaginaires. Mais si ces racines sont impossibles ou imaginaires, elles n'ajoutent rien à l'unité de racine, puisqu'une racine réelle, accompagnée de cent racines imaginaires, ne dit rien de plus que la seule racine réelle, et n'augmentent en rien sa valeur, les impossibles et les chimères n'ayant aucun effet en leur puissance. Les racines imaginaires sont donc nulles par nature, et ne peuvent être d'aucune importance.

Formules extraites du Traité élémentaire d'algèbre, par M. l'abbé B.... Équation proposée $x^3 - 3ghx - g^3 - h^3 = 0$. Première racine réelle $g+h$. Seconde racine imaginaire $\frac{-(g+h)}{2} + \frac{(g-h)\sqrt{-3}}{2}$. Troisième racine imaginaire $\frac{-(g+h)}{2} - \frac{(g-h)\sqrt{-3}}{2}$. Ces deux racines imaginaires procèdent de la fausse équation $xx+(g+h)x+g^2+h^2-gh=0$, dans laquelle le *maximum* $\frac{(g+h)^2}{2}$ est plus foible que le troisième terme $+g^2+h^2-gh$; car faisant $g=3$, $h=5$, on a $\frac{(g+h)^2}{2}=16$, et $+g^2$

$+h^2-gh=19$, valeur du troisième terme qui surpasse le *maximum* 16, coefficient du second terme de 3 unités.

On voit par ces exemples combien l'algèbre est éloignée de favoriser la multiplicité des racines dans une équation composée, puisque les algébristes n'obtiennent qu'une racine réelle dans les équations du troisième degré; les deux autres imaginaires étant des nombres chimériques et impossibles, ne doivent point être placées au rang des racines ni en porter le nom.

Comme la matière des équations composées est très intéressante, on ne doit jamais perdre de vue, lorsqu'il s'agit de cette partie, que de tous les facteurs qui concourent à former une équation composée, un seul en qualité de racine multiplicande, occupe la totalité de l'équation-puissance ou de l'équation-produit; les autres facteurs en qualité de multiplicateurs composés d'unités de fois, n'en font nullement partie, comme nous l'avons fait voir dans l'*Exposition du Calcul des quantités négatives.*

La formule qui nous a conduits à la résolution des équations du second degré, nous con-

duira, par le moyen de quelques changemens, à la résolution des équations des troisième, quatrième, cinquième degrés et autres, dont on suppose le second terme évanoui ; c'est pourquoi nous allons donner la méthode de faire évanouir le second terme d'une équation.

Pour faire évanouir le second terme d'une équation : Soient $y^m + ny^{m-1}$ les deux premiers termes d'une équation, dont n représente le coefficient du second terme, et m représente l'exposant du degré de l'inconnue : on supposera $y = x \pm \frac{n}{m}$. On prendra le signe + si le coefficient du second terme a le signe —, et le signe — s'il a le signe +. On élevera ce binome aux mêmes puissances que la lettre y a dans l'équation ; on comparera les puissances de l'un et de l'autre. Le résultat de cette comparaison donnera une équation dans laquelle le second terme sera évanoui ; les exemples éclairciront les règles. On propose l'équation $y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0$ pour en faire évanouir le second terme. On commencera par faire $y = x + \frac{6}{3}$, ou en réduisant $y = x + 2$. On élevera $x + 2$ aux mêmes puissances où y se trouve

élevé dans les différens termes de l'équation; on les multipliera par les mêmes coefficiens, pour former autant d'équations que l'on fera de comparaisons entre les puissances monomes de l'équation proposée, et les puissances polinomes du binome comparé. C'est ainsi que l'on aura,

$$\begin{aligned} y^3 &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \\ -6y^2 &= -6x^2 - 24x - 24 \\ +11y &= +11x + 22 \\ -6 &= -6 \end{aligned}$$

$$y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = x^3 \quad 0 \quad - x$$

L'équation que l'on a obtenue est une équation dont le second terme est évanoui. Le zéro que l'on a mis à la place du second terme dans l'équation transformée, indique cet évanouissement. Le quatrième terme se trouve aussi éliminé par cas fortuit, le nombre des unités positives et négatives dont il est composé s'étant trouvé égal de part et d'autre. Nous allons donner encore un exemple pour éliminer le second terme d'une équation. Soit proposé de faire évanouir le second terme de l'équation

$y^3-6y^2+13y-12=0$. On fera $y=x+2$; on élevera le binome $x+2$ aux mêmes degrés de puissance que l'inconnue y a dans l'équation proposée; on les multipliera par les mêmes coefficiens, pour comparer les puissances de l'une aux puissances de l'autre, comme on a fait dans le premier exemple, ce qui donnera

$$\begin{array}{rl} y^3= & x^3+6xx+12x+8 \\ -6y^2= & -6xx-24x-24 \\ +13y= & +13x+26 \\ -12= & -12 \\ \hline & x^3 \quad 0 \quad +x-2=0 \end{array}$$

ÉQUATIONS DU TROISIÈME DEGRÉ.

Ordre positif.

Si on fait la racine x d'une équation $=m+n$, on aura $x^2=\overline{m+n}^{2}$, $x^3=\overline{m+n}^{3}$, $x^4=\overline{m+n}^{4}$, $x^5=\overline{m+n}^{5}$, etc. Supposant ces équations effectuées et délivrées du second terme, il s'agit de revenir de la puissance à la racine, et obtenir $x=m+n$; telle est la fin du procédé que nous allons indiquer pour la révolution des équations de tous les degrés. Nous commen-

cerons par celles du troisième, représentées par l'équation générale $x^3 - 3px - s = 0$, ou $x^3 = 3px + s$. On comparera les termes qui composent l'équation proposée à résoudre, à ceux de l'équation générale; et les valeurs déterminées qui résulteront de cette comparaison, étant substituées dans la formule générale en place des lettres qui la composent, donneront les valeurs de $m + n$, ensorte que l'on aura en dernière analyse $x = m + n$. Les exemples serviront d'éclaircissemens.

Formule générale.

$$x = \sqrt[3]{\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} - p^3}} + \sqrt[3]{\frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} - p^3}}$$

PROBLÊME PREMIER.

On demande quel est le nombre dont le cube est égal à six fois ce même nombre $+9$?

RÉSOLUTION.

Selon les conditions du problême, on a $x^3 = 6x + 9$. Comparant terme à terme cette équation à l'équation générale $x^3 = 3px + s$, on trouve $3p = 6$, $p = 2$ et $s = 9$; substituant 2 et 9 en

place des lettres p et s de la formule générale ci-dessus, ou aura

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{9}{2}+\sqrt{\tfrac{81}{4}-8}} + \sqrt[3]{\tfrac{9}{2}-\sqrt{\tfrac{81}{4}-8}}$$

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{9}{2}+\sqrt{\tfrac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\tfrac{9}{2}-\sqrt{\tfrac{49}{4}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{9}{2}+\tfrac{7}{2}} + \sqrt[3]{\tfrac{9}{2}-\tfrac{7}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{16}{2}} + \sqrt[3]{\tfrac{2}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$$

$$x = 2 + 1$$

La racine du binome étant $2+1$, on a $x=3$, valeur requise qui satisfait aux conditions du problême, le cube de 3 qui est 27 étant égal à 6 fois $3+9$, ou $18+9=27$, comme il étoit proposé.

Il faut observer que la première partie de la formule $\frac{s}{2}+\sqrt{\frac{s^2}{4}-p^3}$, exprime la moitié de la somme des cubes plus la moitié de leur différence. La moitié de cette somme est désignée par $\frac{s}{2}$, et la moitié de la différence par $\sqrt{\frac{s^2}{4}-p^3}$. Comme l'expression de la moitié de cette différence est plus difficile à saisir, nous allons donner la preuve qu'elle est égale à la demi-différence des cubes.

Soit $x = m+n$; élevant chaque membre de l'équation à la troisième puissance, elle se changera en $x^3 = 3mn(m+n) + m^3 + n^3$. Substituant dans le second membre x en place de $m+n$, elle se convertit en $x^3 = 3mnx + m^3 + n^3$. Comparant cette équation terme à terme avec l'équation générale $x^3 = 3px + s$, on a $3mn = 3p$, $mn = p$ et $m^3 + n^3 = s$. De l'équation $mn = p$, extrayant $n^3 = \frac{p^3}{m^3}$, et substituant cette valeur dans l'équation $m^3 + n^3 = s$, il vient $m^3 + \frac{p^3}{m^3} = s$. Multipliant par m^3, l'équation devient $m^6 + p^3 = sm^3$, ou $m^6 - sm^3 = -p^3$, équation laquelle résolue par la méthode du second degré, donne pour racine $m^3 - \frac{s}{2} = \sqrt{\frac{s^2}{4} - p^3}$. Or, il s'agit de prouver que $\sqrt{\frac{s^2}{4} - p^3}$ est égal à $\frac{m^3 - n^3}{2}$, moitié de la différence des cubes. Pour cela, il suffit de démontrer que $\sqrt{\frac{s^2}{4} - p^3}$ qui est égal à $m^3 - \frac{s}{2}$, est aussi égal à $\frac{m^3 - n^3}{2}$. Voici comment. Puisque $s = m^3 + n^3$, on a $-\frac{s}{2} = -\frac{m^3}{2} - \frac{n^3}{2}$. Ajoutant m^3 de part et d'autre, $m^3 - \frac{s}{2} = m^3 - \frac{m^3}{2} - \frac{n^3}{2} = \frac{2m^3 - m^3 - n^3}{2} =$

$\frac{m^3-n^3}{2}$: donc $m^3-\frac{s}{2}=\frac{m^3-n^3}{2}$, mais $m^3-\frac{s}{2}$ $=\sqrt{\frac{s^2}{4}-p^3}$; donc $\sqrt{\frac{s^2}{4}-p^3}=\frac{m^3-n^3}{2}$, qui est la vraie demi-différence des cubes.

Il suit des expressions de cette formule, que la racine cubique de la moitié de la somme des cubes, plus la moitié de leur différence, donne la plus grande partie du binome $m+n$, et que la racine cubique de la moitié de la somme des cubes, moins la moitié de la différence, donne la plus petite, ce qu'il est facile de vérifier dans le problême actuel, dont les valeurs de la racine sont 2 et 1. La somme des cubes est $8+1$ $=9$, et leur moitié $\frac{9}{2}$, laquelle ajoutée à $\frac{7}{2}$, moitié de leur différence, donne 8, dont la racine cubique est 2 pour la plus grande; la moitié de la différence $\frac{7}{2}$ retranchée de $\frac{9}{2}$, donne 1, dont la racine cubique est 1 pour la plus petite.

PROBLÊME II.

Trouver le nombre dont la différence entre son cube et le triple de sa valeur soit 2.

RÉSOLUTION.

Le problême mis en équation donne $x^3 - 3x = 2$, ou $x^3 = 3x + 2$. Comparant cette équation avec l'équation générale $x^3 = 3px + s$, on trouve $3p = 3$, $p = 1$ et $s = 2$; substituant 1 et 2 en place des lettres p et s de la formule générale, on aura

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{2}{2} + \sqrt{\tfrac{4}{4} - 1}} + \sqrt[3]{\tfrac{2}{2} - \sqrt{\tfrac{4}{4} - 1}}$$

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{2}{2} + \sqrt{\tfrac{4}{4} - \tfrac{4}{4}}} + \sqrt[3]{\tfrac{2}{2} - \sqrt{\tfrac{4}{4} - \tfrac{4}{4}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{2+0}{2+0}} + \sqrt[3]{\tfrac{2-0}{2-0}}$$

$$x = 1 + 1$$

L'opération donne $1 + 1 = 2$ pour la racine de l'équation, valeur du nombre cherché, puisque la différence entre 8, cube de 2, et 6 triple du même nombre, donne $8 - 6 = 2$, comme l'exige la condition du problême. On voit par cette résolution que lorsque les parties du binome sont égales, la différence exprimée par $\sqrt{\frac{s^2}{4} - p^3}$

devient $=0$; ce qui doit être, puisqu'entre quantités égales la différence est nulle.

PROBLÊME III.

On demande quel est le nombre dont le cube moins 28 *est égal à neuf fois sa valeur?*

RÉSOLUTION.

Soit x le nombre cherché, son cube sera x^3; retranchant 28, on a x^3-28; et parce que cette différence doit égaler $9x$, on formera l'équation $x^3-28=9x$, ou $x^3=9x+28$. Comparant cette équation avec l'équation générale $x^3=3px+s$, on a $3p=9$, $p=3$, $s=28$; substituant les valeurs de p et s dans la formule générale, on aura

$$x=\sqrt[3]{\tfrac{28}{2}+\sqrt{\tfrac{784}{4}-27}}+\sqrt[3]{\tfrac{28}{2}-\sqrt{\tfrac{784}{4}-27}}$$

$$x=\sqrt[3]{\tfrac{28}{2}+\sqrt{\tfrac{784-108}{4}}}+\sqrt[3]{\tfrac{28}{2}-\sqrt{\tfrac{784-108}{4}}}$$

$$x=\sqrt[3]{\tfrac{28}{2}+\tfrac{26}{2}}+\sqrt[3]{\tfrac{28}{2}-\tfrac{26}{2}}$$

$$x=\sqrt[3]{\tfrac{54}{2}}+\sqrt[3]{\tfrac{2}{2}}$$

$$x=\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{1}$$

$$x=3+1$$

Le nombre cherché est $3+1=4$, dont le cube 64 diminué de 28, donne 36 égal à 9 fois 4, comme il étoit proposé.

PROBLÈME IV.

Une personne ayant plusieurs louis dans sa bourse, propose à un mathématicien d'en deviner le nombre, en lui disant que si du cube de ce nombre on soustrait 18 *fois ce même nombre, le restant est* 35. *On demande quel étoit ce nombre?*

RÉSOLUTION.

Soit x le nombre demandé, son cube sera x^3; si de ce nombre on retranche 18 fois ce nombre, on aura $x^3 - 18x$, différence qui doit égaler 35. On formera donc l'équation $x^3 - 18x = 35$, ou $x^3 = 18x + 35$. Comparant cette équation avec l'équation générale $x^3 = 3px + s$, on a $18 = 3p$, $p = 6$, $s = 35$; substituant les valeurs de p et s dans la formule générale, on aura

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{35}{2} + \sqrt{\tfrac{1225}{4} - 216}} + \sqrt[3]{\tfrac{35}{2} - \sqrt{\tfrac{1225}{4} - 216}}$$

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{35}{2} + \sqrt{\tfrac{361}{4}}} + \sqrt[3]{\tfrac{35}{2} - \sqrt{\tfrac{361}{4}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{35}{2} + \tfrac{19}{2}} + \sqrt[3]{\tfrac{35}{2} - \tfrac{19}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{54}{2}} + \sqrt[3]{\tfrac{16}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{8}$$

$$x = 3 + 2$$

Le nombre demandé est $3+2=5$, son cube est 125, 18 fois sa valeur est 90, laquelle soustraite de son cube 125, le restant est 35, comme il étoit proposé. On peut observer, comme dans les problêmes précédens, que la racine cubique de la moitié de la somme des cubes, plus de la moitié de leur différence, est égale à la plus grande des deux parties du binome, et la moitié de la somme des cubes, moins la moitié de leur différence, est égale à la plus petite. En effet, 27, cube de 3, ajouté à 8, cube de 2, donne 35 pour la somme des cubes, dont la moitié est $\frac{35}{2}$. La différence du cube 27 au cube 8, est 19, dont la moitié est $\frac{19}{2}$, laquelle ajoutée à $\frac{35}{2}$ donne 27, dont la racine cubique est exactement 3, plus grande partie du binome; et $\frac{19}{2}$ moitié de la différence retranchée de $\frac{35}{2}$, moitié de la somme des cubes, donne 8, dont la racine cubique est 2 pour la plus foible partie du binome $3+2$.

C'est pour rendre plus sensible la moitié de ces sommes et de ces différences, propriétés remarquables, que l'on n'a point abrégé le calcul des opérations.

PROBLÊME V.

Trouver quel est le nombre dont le cube est égal à six fois ce même nombre +40.

RÉSOLUTION.

Soit x le nombre cherché, son cube sera x^3, six fois ce même nombre sera $6x$; à quoi ajoutant $+40$, on aura l'équation $x^3 = 6x + 40$. Comparant cette équation à l'équation générale $x^3 = 3px + s$, on aura $3p = 6$, $p = 2$, $s = 40$; substituant les valeurs de p et s dans la formule, on aura

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{40}{2} + \sqrt{\tfrac{1600}{4} - 8}} + \sqrt[3]{\tfrac{40}{2} - \sqrt{\tfrac{1600}{4} - 8}}$$

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{40}{2} + \sqrt{\tfrac{1568}{4}}} + \sqrt[3]{\tfrac{40}{2} - \sqrt{\tfrac{1568}{4}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{40}{2} + \tfrac{28 \times \sqrt{2}}{2}} + \sqrt[3]{\tfrac{40}{2} - \tfrac{28 \times \sqrt{2}}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

$$x = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2}$$

$$x = 2 + 2$$

$$x = 4$$

Le nombre qui satisfait à la question est 4, dont le cube 64 est égal à 24+40, comme il étoit proposé.

La résolution de ce problême peut faire naître une objection contre la proposition avancée, que la lettre s de la formule représentoit la somme des cubes des parties du binome; car on diroit que 40 qui répond à la lettre s, n'est pas égal à la somme des cubes de 2 et 2, qui donnent $8 + 8 = 16$.

Pour satisfaire à cette juste observation, nous dirons qu'il faut faire attention que les racines immédiates et non les racines réduites du binome, sont $2+\sqrt{2}$, et $2-\sqrt{2}$; et leurs cubes $20+14\sqrt{2}$, et $20-14\sqrt{2}$, dont la somme est exactement 40, comme on le voit par les opérations ci-après.

$2+\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$
$2+\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$
$4+2\sqrt{2}$	$4-2\sqrt{2}$
$+2\sqrt{2}+2$	$-2\sqrt{2}--2$
$6+4\sqrt{2}$	$6-4\sqrt{2}$
$2+\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$
$12+8\sqrt{2}$	$12-8\sqrt{2}$
$+6\sqrt{2}+8$	$-6\sqrt{2}--8$
$20+14\sqrt{2}$	$20-14\sqrt{2}$

PROBLÈME VI.

Trouver la racine de l'équation du troisième degré $x^3 = -6x+7$.

RÉSOLUTION.

Comparant l'équation proposée à l'équation générale $3px+s$, on aura $3p=-6$, $p=-2$, $s=+7$; substituant -2 et $+7$ en place des lettres p et s de la formule, on aura

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{7}{2}+\sqrt{\tfrac{49}{4}-8}} + \sqrt[3]{\tfrac{7}{2}-\sqrt{\tfrac{49}{4}-8}}$$

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{7}{2}+\sqrt{\tfrac{49}{4}-\tfrac{32}{4}}} + \sqrt[3]{\tfrac{7}{2}-\sqrt{\tfrac{49}{4}-\tfrac{32}{4}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{7}{2}+\sqrt{\tfrac{81}{4}}} + \sqrt[3]{\tfrac{7}{2}-\sqrt{\tfrac{81}{4}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{7}{2}+\tfrac{9}{2}} + \sqrt[3]{\tfrac{7}{2}-\tfrac{9}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{16}{2}} + \sqrt[3]{-\tfrac{2}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-1}$$

$$x = 2 + -1$$

La racine de l'équation proposée est $+2-1=+1$, relative à l'équation du binome-différence $x=m-n$, composé d'une valeur positive et d'une valeur négative plus foible en nombre

d'unités que la positive. Pour en faire la preuve, on substituera 1 en place de x dans l'équation proposée $x^3 = -6x+7$, qui donnera $1 = -6+7$, ou $1 = 1$.

On observera que dans la quatrième colonne horizontale $\sqrt[3]{\frac{7}{2}+\frac{9}{2}}$, le second terme $\frac{9}{2}$ exprime la demi-différence additionnelle entre le cube positif 8 de 2, et le cube négatif -1 de -1, à savoir $8--1=9$, dont la moitié est $\frac{9}{2}$, qu'il ne faut pas confondre avec la même expression $\frac{9}{2}$ qui se trouve dans la quatrième colonne horizontale de la résolution du premier problême du troisième degré, laquelle porte $\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\frac{7}{2}}$, dont le premier terme $\frac{9}{2}$ exprime la demi-somme des cubes de $+2$ et de $+1$, valeur des deux parties de la racine, et le second $\frac{7}{2}$ en exprime la différence rigoureuse. On voit par là qu'une même expression, telle que $+9$, peut signifier la somme des cubes $8+1$, ou la différence additionnelle qu'il y a entre le cube positif $+8$ et le cube négatif -1, dont la valeur $+8--1$ est également $+9$.

PROBLÊME VII.

Trouver la racine de l'équation du troisième degré $x^3 = +6x - 7$.

RÉSOLUTION.

En comparant cette équation, inverse de la précédente, à l'équation générale $3px + s$, on a $3p = +6$, $p = +2$ et $s = -7$; substituant $+2$ et -7 en place de p et de s de la formule, on aura

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{7}{2} + \sqrt{-\tfrac{49}{4} - 8}} + \sqrt[3]{-\tfrac{7}{2} - \sqrt{-\tfrac{49}{4} - 8}}$$

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{7}{2} + \sqrt{-\tfrac{49}{4} - \tfrac{32}{4}}} + \sqrt[3]{-\tfrac{7}{2} - \sqrt{-\tfrac{49}{4} - \tfrac{32}{4}}}$$

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{7}{2} + \sqrt{-\tfrac{81}{4}}} + \sqrt[3]{-\tfrac{7}{2} - \sqrt{-\tfrac{81}{4}}}$$

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{7}{2} + -\tfrac{9}{2}} + \sqrt[3]{-\tfrac{7}{2} - -\tfrac{9}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{16}{2}} + \sqrt[3]{+\tfrac{2}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{-8} + \sqrt[3]{+1}$$

$$x = -2 + 1$$

La racine de l'équation proposée est $-2+1 = -1$ dans l'ordre négatif, laquelle substituée dans $x^3 = 6x - 7$, donne $-1 = -7 + 6 = -1$. Cette racine est relative à l'équation $x = m - n$,

ou $x = 1 - 2$, dans laquelle la négative est plus forte en nombre d'unités que la positive.

PROBLÊME VIII.

On demande la racine de l'équation du troisième degré $x^3 = -\frac{9x}{4} + \frac{26}{8}$?

RÉSOLUTION.

On comparera l'équation proposée à l'équation générale $x^3 = 3px + s$; d'où l'on tirera $3p = -\frac{9}{4}$, $p = -\frac{3}{4}$, $s = \frac{26}{8}$; substituant ces valeurs de p et s dans la formule générale en place des lettres, on aura

$$x = \sqrt[3]{\frac{13}{8} + \sqrt{\frac{169}{64} - \frac{27}{64}}} + \sqrt[3]{\frac{13}{8} - \sqrt{\frac{169}{64} - \frac{27}{64}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{13}{8} + \sqrt{\frac{196}{64}}} + \sqrt[3]{\frac{13}{8} - \sqrt{\frac{196}{64}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{13}{8} + \frac{14}{8}} + \sqrt[3]{\frac{13}{8} - \frac{14}{8}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$$

$$x = \frac{3}{2} + -\frac{1}{2}$$

$$x = 1$$

La racine demandée est $1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$. Pour en faire la preuve, si on substitue l'unité en place de x dans l'équation proposée, on a $1 = -\frac{9}{4} + \frac{11}{2} = \frac{2}{2} = 1$, conformément à l'énoncé du problême.

PROBLÈME IX.

Résoudre l'équation du troisième degré $x^3+6x-20=0$.

RÉSOLUTION.

Comparant l'équation à résoudre $x^3+6x-20=0$, que l'on mettra sous cette forme $x^3=-6x+20$, avec l'équation générale $x^3=3px+s$, on aura $-6=3p$, $p=-2$, $s=20$; substituant les valeurs de p et de s dans la formule générale, on aura

$$x=\sqrt[3]{\tfrac{20}{2}+\sqrt{\tfrac{400}{4}--8}}+\sqrt[3]{\tfrac{20}{2}-\sqrt{\tfrac{400}{4}--8}}$$

$$x=\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}+\sqrt[3]{10-\sqrt{108}}$$

$$x=\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$$

$$x=1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}$$

$$x=2$$

La racine de l'équation proposée est $+2$, comme il en conste par la substitution; car en substituant dans l'équation $x^3=-6x+20$ la valeur 2, on obtient $8=-12+20$, ou $8=8$; on observera que le cube de $1+\sqrt{3}$ est $10+6\sqrt{3}$.

PROBLÊME X.

On demande de déterminer la racine cubique de l'équation $x^3 = -3x+4$?

RÉSOLUTION.

Comparant la proposée à l'équation générale $x^3 = 3px+s$, on a $3p = 3$, $p = 1$, $s = 4$; substituant les valeurs de p et s dans la formule générale, on aura

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{4}{2}+\sqrt{\tfrac{16}{4}+1}} + \sqrt[3]{\tfrac{4}{2}-\sqrt{\tfrac{16}{4}+1}}$$

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{4}{2}+\sqrt{\tfrac{20}{4}}} + \sqrt[3]{\tfrac{4}{2}-\sqrt{\tfrac{20}{4}}}$$

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

$$x = \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{5} + \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$x = 1$$

La racine cubique de l'équation donnée est 1, laquelle substituée dans $x^3 = -3x+4$, donne $1 = -3+4$ ou $1 = 1$. Il faut faire attention que $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ est la racine cubique de $2+\sqrt{5}$, et $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$ est celle de $2-\sqrt{5}$, comme on peut s'en convaincre en élevant l'une et l'autre de ces racines à leur troisième puissance.

Quand les racines ne pourront être exprimées

exactement par des nombres entiers ou fractionnaires, il faudra se contenter des expressions irrationnelles dont on extraira les valeurs des racines par approximation. Le problême suivant est de cette nature.

PROBLÊME XI.

Trouver la racine de l'équation $x^3 = 6x + 16$.

RÉSOLUTION.

Comparant la proposée à l'équation générale $x^3 = 3px + s$, on a $3p = 6$, $p = 2$, $s = 16$; substituant les valeurs de p et s dans la formule, on aura

$$x = \sqrt[3]{8 + \sqrt{64 - 8}} + \sqrt[3]{8 - \sqrt{64 - 8}}$$

$$x = \sqrt[3]{8 + \sqrt{56}} + \sqrt[3]{8 - \sqrt{56}}$$

Pour avoir les valeurs approchées des racines ci-dessus, on aura recours aux décimales.

OBSERVATIONS.

Lorsque dans l'application des termes de l'équation à résoudre comparés à ceux de la formule générale $x = \sqrt[3]{\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{ss}{4} - p^3}}$, la va-

leur correspondante à p^3 surpasse $\frac{1}{4}s^2$, la formule est en défaut et se trouve insuffisante, en ce qu'il y a un excès de quantité dans la valeur p^3, dont le *maximum* est $\frac{1}{4}s^2$, ce que nous allons prouver.

La lettre p de la formule représente le produit mn des deux parties du binome, et p^3 exprime le cube de ce produit. La lettre s représente la somme des cubes m^3+n^3, s^2 en indique le carré, et $\frac{s^2}{4}$ en indique la quatrième partie. Il s'agit donc de prouver que le cube du produit des deux parties du binome ne peut jamais surpasser la quatrième partie du carré de la somme de leurs cubes. Pour procéder avec plus de facilité et de clarté, nous supposerons les deux parties du binome égales entre elles, ce qui donnera $2m$ pour leur somme, et m^2 pour leur produit. Faisant le cube du produit m^2, on aura m^6; faisant le carré de la somme des cubes m^3+m^3 ou $2m^3$, on aura $4m^6$; mais m^6 est à $4m^6$, comme 1 est à 4 : donc $p^3 = m^6$ n'est que la quatrième partie de $s^2 = 4m^6$: donc lorsque $p^3 > \frac{s^2}{4}$ il y a un excès de *maximum*, ce qui ne prouve pas que le problème

est insoluble, comme dans les équations du second degré, mais seulement que la formule en pareil cas est insuffisante à la résolution, et qu'il faut avoir recours à un autre procédé. Ce procédé seroit de pouvoir transformer généralement une équation en une autre de même valeur, comme il est facile de le prouver par quelques problêmes particuliers.

PROBLÊME PREMIER.

On demande la racine de l'équation $x^3 = 90x + 100$ *du troisième degré, qui est dans le cas d'exception de la formule?*

RÉSOLUTION.

On formera une seconde équation égale en valeur à l'équation proposée. Par exemple, $x^3 = 60x + 400$, dont on prendra le second membre pour l'égaler au second de l'équation à résoudre, ce qui donnera la nouvelle équation $90x + 100 = 60x + 400$. Pour en dégager l'inconnue, on soustraira $60x$ de part et d'autre, et l'on aura $30x + 100 = 400$; retranchant 100 de chaque membre, il vient $30x = 300$; divi-

sant par 30, on obtient finalement $x = \frac{300}{30} = 10$, valeur exacte de la racine cherchée, laquelle étant substituée dans l'équation proposée $x^3 = 90x + 100$, donne $1000 = 900 + 100 = 1000$, preuve complette de la vérité de l'opération.

On auroit pu prendre pour seconde équation de comparaison $x^3 = 70x + 300$, $x^3 = 50x + 500$, $x^3 = 40x + 600$, $x^3 = 30x + 700$, $x^3 = 84x + 160$, etc. Toutes ces équations de comparaison sont résolubles par la formule. On pourroit en employer d'autres qui ne le soient pas, telle que $x^3 = 80x + 200$; mais il est indifférent qu'elles le soient ou qu'elles ne le soient pas, elles procureront toujours la résolution du problême. On donne en algèbre le nom *de cas irréductible* au cas d'exception dont nous parlons; mais comme l'on peut transformer une équation qui contient le cas irréductible en un nombre indéterminé d'autres équations de même valeur qui ne le renferment pas, on peut dire en ce sens qu'il n'y a point de cas irréductible.

PROBLÊME II.

Trouver la racine de l'équation $x^3 = 28x + 48$ *qui est dans le cas d'exception.*

RÉSOLUTION.

On formera l'équation de même valeur $x^3 = 12x + 144$; comparant les seconds membres des deux équations, on a $28x + 48 = 12x + 144$, ou $16x = 96$; divisant par 16, il vient $x = \frac{96}{16} = 6$, valeur de la racine de l'équation proposée $x^3 = 28x + 48$; substituant 6 en place de x, il vient $216 = 168 + 48 = 216$, égalité parfaite qui prouve la vérité du procédé.

PROBLÊME III.

Résoudre l'équation $x^3 = 700x + 6000$ *qui se trouve engagée dans le cas d'exception de la formule.*

RÉSOLUTION.

On formera une seconde équation égale en valeur à la proposée, telle que $400x + 15000$. On prendra les seconds membres de chaque équation pour en former une troisième qui

sera $700x+6000=400x+15000$. Soustrayant $400x$ de part et d'autre, elle se change en $300x+6000=15000$. Retranchant encore 6000 de l'un et l'autre membre, on a $300x=9000$. Divisant par 300, on obtient finalement $x=30$, vraie valeur de la racine de l'équation proposée, puisqu'en substituant 30 dans l'équation $x^3=700x+6000$ en place de x, l'équation donne $27000=21000+6000=27000$.

Ces trois exemples particuliers suffisent pour démontrer qu'en transformant une équation du troisième degré en une autre de même valeur, soit qu'elle appartienne au cas d'exception ou non, on obtient infailliblement la racine de l'équation proposée.

Nous avons dit que la formule $x=\frac{s}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}ss-p}$ exprimoit la moitié de la somme, plus la moitié de la différence de deux quantités; il faut entendre par *différence*, une différence rigoureuse, dont la quantité à soustraire est toujours plus foible que celle dont on la soustrait, ce qui arrive toujours lorsque la quantité p qui est sous le radical de la formule, est plus foible que $\frac{1}{4}ss$, c'est-à-dire,

lorsque $\frac{1}{4}pp > p$. Si le contraire arrivoit, et que l'on eût $\frac{1}{4}ss < p$, la différence seroit une *différence par emprunt;* pour lors la formule seroit en défaut et insuffisante à procurer la résolution du problême, et de plus l'insolubilité de la question, si le problême est du second degré; mais s'il étoit du troisième degré qui répond dans la formule à $\sqrt{\frac{ss}{4}-p^3}$, alors $\frac{ss}{4} < p^3$ ne feroit qu'indiquer l'insuffisance de la formule à procurer la solution du problême, et non pas l'insolubilité de la question proposée, comme on a pu le voir par la solution des trois problêmes ci-dessus.

L'insuffisance de la formule dans le cas d'exception, vient de ce que la formule générale de résolution ayant été calquée sur une différence rigoureuse, le cas d'exception $p^3 > \frac{1}{4}ss$ se trouve appartenir à une différence par emprunt.

ÉQUATIONS DU TROISIÈME DEGRÉ.

Ordre négatif.

Pour se conformer à l'analogie des signes de l'ordre négatif, nous supposerons la racine négative de l'équation égale à un binome négatif; par exemple, $-x=-m-n$. En conséquence de ce changement de signe et du transport de la racine positive dans l'ordre négatif, nous transformerons pareillement les formules. L'équation générale sera $-x^3=-3px-s$, et changeant les signes de la formule générale, on aura la suivante :

$$-x=\sqrt[3]{-\frac{s}{2}-\sqrt{-\frac{s^2}{4}-p^3}}+\sqrt[3]{-\frac{s}{2}+\sqrt{-\frac{s^2}{4}-p^3}}$$

PROBLÊME PREMIER.

On demande la racine de l'équation $-x^3=-6x-9$?

RÉSOLUTION.

Comparant terme à terme l'équation proposée avec l'équation générale $-x^3=-3px$

$-s$, on a $-3p=-6$, $-p=-2$, $-s=-9$; substituant les valeurs -2 et -9 en place de p et de s dans la formule, on aura

$$-x=\sqrt[3]{-\tfrac{9}{2}-\sqrt{-\tfrac{81}{4}--8}}+\sqrt[3]{-\tfrac{9}{2}+\sqrt{-\tfrac{81}{4}--8}}$$

$$-x=\sqrt[3]{-\tfrac{9}{2}-\sqrt{-\tfrac{49}{4}}}+\sqrt[3]{-\tfrac{9}{2}+\sqrt{-\tfrac{49}{4}}}$$

$$-x=\sqrt[3]{-\tfrac{9}{2}--\tfrac{7}{2}}+\sqrt[3]{-\tfrac{9}{2}-\tfrac{7}{2}}$$

$$-x=\sqrt[3]{-\tfrac{2}{2}}+\sqrt[3]{-\tfrac{16}{2}}$$

$$-x=\sqrt[3]{-1}+\sqrt[3]{-8}$$

$$-x=-1+-2$$

La racine de l'équation est -3, laquelle substituée dans l'équation proposée $-x^3=-6x-9$, donne $-27=-18-9$, ou $-27=-27$, résolution aussi réelle et aussi vraie que celle de l'ordre positif. Selon les algébristes, $\sqrt[3]{-1}$, $\sqrt[3]{-8}$ sont des racines possibles, parce qu'elles sont des puissances impaires négatives; mais $\sqrt[2]{-1}$ et $\sqrt[2]{-8}$ sont des racines impossibles, parce qu'elles sont des racines de puissances paires; distinction à laquelle il ne faut avoir aucun égard.

PROBLÊME II.

Déterminer la racine de l'équation $-x^3 = -3x - 2$.

RÉSOLUTION.

Comparant l'équation donnée avec l'équation générale $-x^3 = -3px - s$, on a $-3p = -3$, $p = -1$ et $-s = -2$; substituant les valeurs -1 et -2 en place de $-p$ et de $-s$, il vient

$$-x = \sqrt[3]{-\tfrac{2}{2} - \sqrt{-\tfrac{4}{4} - -1}} + \sqrt[3]{-\tfrac{2}{2} + \sqrt{-\tfrac{4}{4} - -1}}$$

$$-x = \sqrt[3]{-\tfrac{2}{2} - \sqrt{-\tfrac{4}{4} - -\tfrac{4}{4}}} + \sqrt[3]{-\tfrac{2}{2} + \sqrt{-\tfrac{4}{4} - -\tfrac{4}{4}}}$$

$$-x = \sqrt[3]{-\tfrac{2-0}{2}} \qquad + \sqrt[3]{-\tfrac{2+0}{2}}$$

$$-x = \sqrt[3]{-1} \qquad + \sqrt[3]{-1}$$

$$-x = -1 \qquad + -1$$

La racine de l'équation est $-1 + -1 = -2$; cette valeur substituée dans l'équation $-x^3 = -3x - 2$, donne $-8 = -6 - 2 = -8$. On observera que les cubes des deux parties du binome étant égaux, leur différence est 0, comme on l'a trouvé.

PROBLÊME III.

L'équation $-x^3 = -9x - 28$ *étant donnée, on demande d'en extraire la racine cubique?*

RÉSOLUTION.

L'équation étant toute formée, on comparera l'équation proposée avec l'équation générale, $-x^3 = -3px - s$, ce qui donnera $-3p = -9$, $-p = -3$, $-s = -28$. En faisant la substitution de -3 et -28 en place de $-p$ et $-s$, on aura

$$-x = \sqrt[3]{-\frac{28}{2} - \sqrt{-\frac{784}{4} - 27}} + \sqrt[3]{-\frac{28}{2} + \sqrt{-\frac{784}{4} - 27}}$$

$$-x = \sqrt[3]{-\frac{28}{2} - \sqrt{-\frac{784 - 108}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{28}{2} + \sqrt{-\frac{784 - 108}{4}}}$$

$$-x = \sqrt[3]{-\frac{28}{2} - -\frac{26}{2}} \quad + \sqrt[3]{-\frac{28}{2} + -\frac{26}{2}}$$

$$-x = \sqrt[3]{-\frac{2}{2}} \quad + \sqrt[3]{-\frac{54}{2}}$$

$$-x = \sqrt[3]{-1} \quad + \sqrt[3]{-27}$$

$$-x = -1 \quad + -3$$

La racine cubique de l'équation proposée est -4, dont le cube -64 est égal à $-36 - 28 = -64 = -9x - 28$. Si on prend la somme des cubes de -1 et -3, on aura -28,

dont la moitié est — 14. La différence des deux cubes est — 26, dont la moitié est —13. Si on ajoute — 13 et — 14, on aura — 27, dont la racine cubique est —3 pour la plus foible en valeur et la plus forte en nombre d'unités. Si de — 14 on ôte —13, on aura — 1, dont la racine cubique est — 1 pour la plus forte en valeur et la plus foible en nombre d'unités.

PROBLÊME IV.

Trouver un nombre dont la différence de son cube à dix-huit fois sa valeur soit — 35.

RÉSOLUTION.

Selon l'énoncé du problême, le nombre que l'on demande ne peut être que négatif, c'est pourquoi on le désignera par $-x$, dont le cube est $-x^3$; et la différence de ce cube à dix-huit fois la valeur du nombre demandé, sera $-x^3 - -18x$, et parce qu'elle doit être égale à -35, on aura l'équation $-x^3 - -18x = -35$, ou $x^3 = -18x - 35$. On comparera cette équation à l'équation générale $-x^3 = -3px - s$, qui donnera $-3p = -18$, $-p = -6$, $-s$

$= -35$. Faisant la substitution de -6 et -35 en place de $-p$ et de $-s$ de la formule, on aura

$$-x = \sqrt[3]{-\tfrac{35}{2} - \sqrt{-\tfrac{1225}{4} - -216}} + \sqrt[3]{-\tfrac{35}{2} + \sqrt{-\tfrac{1225}{4} - -216}}$$

$$-x = \sqrt[3]{-\tfrac{35}{2} - \sqrt{-\tfrac{361}{4}}} + \sqrt[3]{-\tfrac{35}{2} + \sqrt{-\tfrac{361}{4}}}$$

$$-x = \sqrt[3]{-\tfrac{35}{2} - -\tfrac{19}{2}} + \sqrt[3]{-\tfrac{35}{2} + -\tfrac{19}{2}}$$

$$-x = \sqrt[3]{-\tfrac{16}{2}} + \sqrt[3]{-\tfrac{54}{2}}$$

$$-x = \sqrt[3]{-8} + \sqrt[3]{-\tfrac{27}{2}}$$

$$-x = -2 + -3$$

Le nombre demandé est -5, dont le cube est -125 ; dix-huit fois sa valeur est -90, dont la différence à -125 est -35, selon les conditions requises.

PROBLÊME V.

On demande quel est le nombre dont la différence entre son cube et six fois sa valeur est égal à -40 ?

RÉSOLUTION.

Il est évident que le nombre inconnu est de l'ordre négatif, c'est pourquoi on le fera $-x$.

Son cube sera $-x^3$, six fois la valeur du nombre cherché donne $-6x$, dont la différence avec le cube est $-x^3--6x$, laquelle devant égaler -40, on formera l'équation $-x^3--6x=-40$, ou $-x^3=-6x-40$. Comparant cette équation à l'équation générale $-x^3=-3px-s$, on a $-3p=-6$, $-p=-2$, $-s=-40$; substituant -2 et -40 en place de $-p$ et $-s$ dans la formule, on aura

$$-x=\sqrt[3]{-\frac{40}{2}-\sqrt{-\frac{1600}{4}}--8}+\sqrt[3]{-\frac{40}{2}+\sqrt{-\frac{1600}{4}}--8}$$

$$-x=\sqrt[3]{-\frac{40}{2}-\sqrt{-\frac{1568}{4}}}+\sqrt[3]{-\frac{40}{2}+\sqrt{-\frac{1568}{4}}}$$

$$-x=\sqrt[3]{-\frac{40}{2}-\sqrt{-\frac{28\times\sqrt{2}}{2}}}+\sqrt[3]{-\frac{40}{2}-\sqrt{-\frac{28\times\sqrt{2}}{2}}}$$

$$-x=\sqrt[3]{-20--14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{-20+-14\sqrt{2}}$$

$$-x=-2+\sqrt{2}. \qquad +-2-\sqrt{2}$$

$$-x=-2 \qquad +-2$$

Le nombre demandé est -4, son cube est -64, duquel ayant retranché six fois sa valeur -4, on a $-64--24$, différence $=-40$, selon les conditions du problême. Si on vouloit faire la preuve en substituant -4 dans l'équation $-x^3=-6x-40$, on auroit $-64=-24-40=-64$.

ÉQUATIONS DU QUATRIÈME DEGRÉ.

Ordre positif.

On procédera à la résolution des équations du quatrième degré, comme l'on a fait pour celles du troisième, la formule étant applicable aux équations de tous les degrés, en faisant l'exposant du premier radical et de la lettre p égal à l'exposant du degré de l'équation proposée. On supposera, comme dans les équations précédentes, $x = m + n$. On supposera l'équation générale dégagée du second terme $x^4 = 4px^2 + 2p^2 + s$. Cela présupposé, voici la formule qui fera trouver les parties du binome racine de l'équation à résoudre.

$$x = \sqrt[4]{\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} - p^4}} + \sqrt[4]{\frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} - p^4}}$$

PROBLÈME PREMIER.

Trouver la racine quatrième de l'équation $x^4 = 8x^2 - 8 + 17$.

RÉSOLUTION.

Comparant cette équation à l'équation générale $x^4 = 4px^2 + 2p^2 + s$, on a $8 = 4p$, $p = 2$,

$s = 17$; substituant les valeurs de p et s dans la formule, on aura

$$x = \sqrt[4]{\tfrac{17}{2} + \sqrt{\tfrac{289}{4} - 16}} + \sqrt[4]{\tfrac{17}{2} - \sqrt{\tfrac{289}{4} - 16}}$$

$$x = \sqrt[4]{\tfrac{17}{2} + \sqrt{\tfrac{289}{4} - \tfrac{64}{4}}} + \sqrt[4]{\tfrac{17}{2} - \sqrt{\tfrac{289}{4} - \tfrac{64}{4}}}$$

$$x = \sqrt[4]{\tfrac{17}{2} + \sqrt{\tfrac{225}{4}}} + \sqrt[4]{\tfrac{17}{2} - \sqrt{\tfrac{225}{4}}}$$

$$x = \sqrt[4]{\tfrac{17}{2} + \tfrac{15}{2}} + \sqrt[4]{\tfrac{17}{2} - \tfrac{15}{2}}$$

$$x = \sqrt[4]{\tfrac{32}{2}} + \sqrt[4]{\tfrac{2}{2}}$$

$$x = \sqrt[4]{16} + \sqrt[4]{1}$$

$$x = +2 + 1$$

La racine quatrième de l'équation proposée est $2+1=3$; car si on substitue 3 en place d'x dans l'équation $x^4 = 8x^2 - 8 + 17$, les membres de l'équation sont parfaitement égaux, et donnent $81 = 72 + 17 - 8 = 89 - 8 = 81$, quatrième puissance de $+3$.

On observera dans la formule générale pour le quatrième degré, que la première partie exprime la moitié de la somme des quatrième puissances des deux parties du binome, plus la moitié de leur différence; et la seconde exprime la même demi-somme, moins la moitié de cette même différence. Nous avons fait observer

cette propriété dans les formules des équations du second et du troisième degré ; c'est pour constater la généralité de cette loi intéressante que nous faisons ces observations ; vérité facile à reconnoître dans les applications aux exemples numériques. Les parties de la racine binome de ce dernier problême, sont 2 et 1. La quatrième puissance de 2 est 16 ; celle de 1 est 1, dont la somme est 17, et sa moitié $\frac{17}{2}$. La différence de 16 à 1 est 15, et sa moitié est $\frac{15}{2}$, comme on le voit à la quatrième colonne horizontale de l'opération figurée. Ces deux expressions réunies donnent $\frac{32}{2} = 16$, dont la racine quatrième est $+2$, valeur de la plus grande partie du binome. Quant à la seconde partie, son expression est $\frac{17}{2} - \frac{15}{2}$, ce qui signifie moitié de la somme moins la moitié de la différence, qui donne pour valeur réduite $+\frac{2}{2} = 1$, plus petite des deux quantités. On a pris des exemples en nombres ronds pour pouvoir constater, d'une manière évidente, la vérité des principes et la généralité de la loi exprimée dans la disposition des termes de la formule.

PROBLÈME II.

On demande la racine quatrième de l'équation $x^4 = 12x^2 - 18 + 82$?

RÉSOLUTION.

Comparant l'équation proposée à l'équation générale $x^4 = 4px^2 - 2p^2 + s$, on a $12 = 4p$, $p = 3$, $s = 82$; substituant les valeurs 3 et 82 en place de p et de s de la formule générale, on aura

$$x = \sqrt[4]{\tfrac{82}{2} + \sqrt{\tfrac{6724}{4} - 81}} + \sqrt[4]{\tfrac{82}{2} - \sqrt{\tfrac{6724}{4} - 81}}$$

$$x = \sqrt[4]{\tfrac{82}{2} + \sqrt{\tfrac{6724 - 324}{4}}} + \sqrt[4]{\tfrac{82}{2} - \sqrt{\tfrac{6724 - 324}{4}}}$$

$$x = \sqrt[4]{\tfrac{82}{2} + \sqrt{\tfrac{6400}{4}}} + \sqrt[4]{\tfrac{82}{2} - \sqrt{\tfrac{6400}{4}}}$$

$$x = \sqrt[4]{\tfrac{82}{2} + \tfrac{80}{2}} + \sqrt[4]{\tfrac{82}{2} - \tfrac{80}{2}}$$

$$x = \sqrt[4]{\tfrac{162}{2}} + \sqrt[4]{\tfrac{2}{2}}$$

$$x = 3 + 1$$

La racine quatrième de l'équation proposée est $4 = 3 + 1$, ce qu'il est facile de vérifier en substituant 4 en place de x dans l'équation $x^4 = 12x^2 - 18 + 82$, ce qui donnera $256 = 192 + 82 - 18$, ou $256 = 256$.

PROBLÊME III.

On demande la valeur de la racine quatrième de l'équation suivante $x^4 = 24x^2 - 72 + 97$?

RÉSOLUTION.

L'équation proposée étant une équation du quatrième degré, dont le second terme est évanoui, on la comparera terme à terme avec l'équation générale du quatrième degré $x^4 = 4px^2 - 2p^2 + s$, d'où résultera $4p = 24$, $p = 6$, $s = 97$; substituant dans la formule les valeurs de p et s, qui sont 6 et 97, on aura l'opération détaillée comme il suit,

$$x = \sqrt[4]{\frac{97}{2} + \sqrt{\frac{9409}{4} - 1296}} + \sqrt[4]{\frac{97}{2} - \sqrt{\frac{9409}{4} - 1296}}$$

$$x = \sqrt[4]{\frac{97}{2} + \sqrt{\frac{9409}{4} - \frac{5184}{4}}} + \sqrt[4]{\frac{97}{2} - \sqrt{\frac{9409}{4} - \frac{5184}{4}}}$$

$$x = \sqrt[4]{\frac{97}{2} + \sqrt{\frac{4225}{4}}} + \sqrt[4]{\frac{97}{2} - \sqrt{\frac{4225}{4}}}$$

$$x = \sqrt[4]{\frac{97}{2} + \frac{65}{2}} + \sqrt[4]{\frac{97}{2} - \frac{65}{2}}$$

$$x = \sqrt[4]{\frac{162}{2}} + \sqrt[4]{\frac{32}{2}}$$

$$x = \sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{16}$$

$$x = +3 + 2$$

La racine quatrième de l'équation proposée est $5=3+2$, laquelle substituée en place de x, donne les membres de l'équation parfaitement égaux; à savoir, $525=500+97-72=597-72=525$.

En jetant les yeux sur la quatrième colonne horizontale $x=\sqrt[4]{\frac{97}{2}+\frac{65}{2}}+\sqrt[4]{\frac{97}{2}-\frac{65}{2}}$, on voit qu'elle exprime plus distinctement que les autres la moitié de la somme des quatrième puissances, plus la moitié de leur différence, plus la moitié de la même somme, moins la moitié des différences des mêmes puissances. En effet, $\frac{97}{2}+\frac{65}{2}=81$, dont la racine quatrième est exactement 3, valeur de la plus forte partie du binome, et $\frac{97}{2}-\frac{65}{2}=16$, dont la racine quatrième est 2 pour la plus foible.

ÉQUATIONS DU QUATRIÈME DEGRÉ.

Ordre négatif.

On supposera la racine négative $-x=-m-n$. On changera l'équation générale de l'ordre positif en $-x^4=-4px^2+2p^2-s$; on changera de même tous les signes de la formule générale qui se transformera en

$$-x=\sqrt[4]{-\frac{s}{2}-\sqrt{\frac{s^2}{4}-p^4}}+\sqrt[4]{-\frac{s}{2}+\sqrt{\frac{s^2}{4}-p^4}}.$$

On fait ces changemens pour mieux caractériser l'opposition des deux ordres de calcul; mais on ne doit pas les regarder comme absolument nécessaires, la première formule pouvant servir pour les deux ordres.

PROBLÊME PREMIER.

Trouver la racine quatrième de l'équation $-x^4=-8x^2+8-17$.

RÉSOLUTION.

Comparant l'équation proposée à l'équation générale, on a $-4p=-8$, $-p=-2$, $-s=-17$; substituant -2 et -17 en place de $-p$ et de $-s$ de la formule, on aura

$$-x=\sqrt[4]{-\frac{17}{2}-\sqrt{-\frac{289}{4}-16}}+\sqrt[4]{-\frac{17}{2}+\sqrt{-\frac{289}{4}-16}}$$

$$-x=\sqrt[4]{-\frac{17}{2}-\sqrt{-\frac{289-64}{4}}}+\sqrt[4]{-\frac{17}{2}+\sqrt{-\frac{289-64}{4}}}$$

$$-x=\sqrt[4]{-\frac{17}{2}-\sqrt{-\frac{225}{4}}}+\sqrt[4]{-\frac{17}{2}+\sqrt{-\frac{225}{4}}}$$

$$-x=\sqrt[4]{-\frac{17}{2}--\frac{15}{2}}+\sqrt[4]{-\frac{17}{2}+-\frac{15}{2}}$$

$$-x=\sqrt[4]{-\frac{2}{2}}+\sqrt[4]{-\frac{32}{2}}$$

$$-x=\sqrt[4]{-1}+\sqrt[4]{-16}$$

$$-x=-1+-2$$

La racine de l'équation proposée est $-3 = -1-2$, comme il en conste par la substitution de -3 en place de x, dont on extrait $-81 = -89+8 = -81$. L'ordre négatif étant opposé à l'ordre positif, l'addition de la moitié de la différence à la moitié de la somme donne la plus petite valeur, le contraire de l'ordre positif, et la soustraction de la moitié de la différence donne la plus forte. En effet, $-\frac{17}{2} + -\frac{15}{2}$ ont donné -2, et $-\frac{17}{2} - -\frac{15}{2}$ ont donné -1, nombre plus fort en valeur que -2, ce dernier effaçant deux unités positives, -1 n'en effaçant qu'une, raison pour laquelle $5-2=3$ est plus foible que $5-1=4$.

PROBLÊME II.

Extraire la racine de l'équation $-x^4 = -12x^2+18-82$.

RÉSOLUTION.

La comparaison de l'équation proposée à l'équation générale $-x^4 = -4px^2-2p^2-s$, donnera $-4p = -12$, $-p = -3$, $-s = -82$;

substituant dans la formule -3 en place de $-p$, et -82 en place de $-s$, on aura

$$-x=\sqrt[4]{-\tfrac{82}{2}-\sqrt{-\tfrac{6724}{4}--81}}+\sqrt[4]{-\tfrac{82}{2}+\sqrt{-\tfrac{6724}{4}--81}}$$

$$-x=\sqrt[4]{-\tfrac{82}{2}-\sqrt{-\tfrac{6724+324}{4}}}+\sqrt[4]{-\tfrac{82}{2}+\sqrt{-\tfrac{6724--324}{4}}}$$

$$-x=\sqrt[4]{-\tfrac{82}{2}-\sqrt{-\tfrac{6400}{4}}}+\sqrt[4]{-\tfrac{82}{2}+\sqrt{-\tfrac{6400}{4}}}$$

$$-x=\sqrt[4]{-\tfrac{82}{2}--\tfrac{80}{2}}+\sqrt[4]{-\tfrac{82}{2}+-\tfrac{80}{2}}$$

$$-x=\sqrt[4]{-\tfrac{2}{2}}+\sqrt[4]{-\tfrac{162}{2}}$$

$$-x=\sqrt[4]{-1}+\sqrt[4]{-81}$$

$$-x=-1+-3$$

La racine quatrième de l'équation proposée est $-4=-1-3$; laquelle substituée dans la même équation, donne $-256=-274--18=-256$.

PROBLÈME III.

On demande d'extraire la racine quatrième de l'équation de l'ordre négatif $-x^4=-24x^2+72-97$?

RÉSOLUTION.

Comparant, comme dans les problèmes précédens, l'équation proposée avec l'équation

générale $-x^4 = -4px^2 + 2p^2 - s^4$, on a $-4p = -24$, $p = -6$ et $-s = -97$; substituant -6 en place de $-p$, et -97 en place de $-s$ dans la formule, on aura

$$-x = \sqrt[4]{-\frac{97}{2} - \sqrt{-\frac{9409}{4} - 1296}} + \sqrt[4]{-\frac{97}{2} + \sqrt{-\frac{9409}{4} - 1296}}$$

$$-x = \sqrt[4]{-\frac{97}{2} - \sqrt{-\frac{9409 - 5184}{4}}} + \sqrt[4]{-\frac{97}{2} + \sqrt{-\frac{9409 - 5184}{4}}}$$

$$-x = \sqrt[4]{-\frac{97}{2} - \sqrt{-\frac{4225}{4}}} + \sqrt[4]{-\frac{97}{2} + \sqrt{-\frac{4225}{4}}}$$

$$-x = \sqrt[4]{-\frac{97}{2} - -\frac{65}{2}} + \sqrt[4]{-\frac{97}{2} + -\frac{65}{2}}$$

$$-x = \sqrt[4]{-\frac{32}{2}} + \sqrt[4]{+\frac{162}{2}}$$

$$-x = \sqrt[4]{-16} + \sqrt{-81}$$

$$-x = -2 + -3$$

La racine extraite est $-5 = -2 - 3$, laquelle substituée dans l'équation $-x^4 = +24x^2 + 72 - 97$, donne $-625 = -697 + 72 = -625$.

ÉQUATIONS DU CINQUIÈME DEGRÉ.

Ordre positif.

On supposera, comme dans les équations précédentes, la racine x divisée en deux parties formant un binome; par exemple, $x = m + n$: on supposera de plus l'équation générale $x^5 =$

$5px^3 - 5p^2x + s$, et la formule générale relative au cinquième degré, sera

$$x = \sqrt[5]{\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} - p^5}} + \sqrt[5]{\frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} - p^5}}$$

PROBLÈME PREMIER.

On demande quelle est la racine de l'équation $x^5 = 10x^3 - 20x + 33$?

RÉSOLUTION.

Comparant les termes de l'équation proposée aux termes de l'équation générale, on a $5p = 10$, $p = 2$, $s = 33$; substituant les valeurs de p et s dans la formule générale, on aura

$$x = \sqrt[5]{\frac{33}{2} + \sqrt{\frac{1089}{4} - 32}} + \sqrt[5]{\frac{33}{2} - \sqrt{\frac{1089}{4} - 32}}$$

$$x = \sqrt[5]{\frac{33}{2} + \sqrt{\frac{1089 - 128}{4}}} + \sqrt[5]{\frac{33}{2} - \sqrt{\frac{1089 - 128}{4}}}$$

$$x = \sqrt[5]{\frac{33}{2} + \sqrt{\frac{961}{4}}} + \sqrt[5]{\frac{33}{2} - \sqrt{\frac{961}{4}}}$$

$$x = \sqrt[5]{\frac{33}{2} + \frac{31}{2}} + \sqrt[5]{\frac{33}{2} - \frac{31}{2}}$$

$$x = \sqrt[5]{\frac{64}{2}} + \sqrt[5]{\frac{2}{2}}$$

$$x = \sqrt[5]{32} + \sqrt[5]{1}$$

$$x = 2 + 1$$

La racine demandée est $3=2+1$, laquelle substituée dans l'équation proposée, donne $243=270+33-60=303-60=243$.

Si l'on fait attention à la quatrième colonne horizontale de l'opération $x=\sqrt[5]{\frac{33}{2}+\frac{31}{2}}+\sqrt[5]{\frac{33}{2}-\frac{31}{2}}$, on verra qu'elle exprime plus clairement que les autres colonnes, la moitié des sommes des cinquième puissances, plus ou moins la moitié de leur différence. En effet, 33 est composé de 32, qui est la cinquième puissance de 2 et de 1 cinquième puissance de 1, dont la moitié est exprimée par $\frac{33}{2}$. La différence de 32 à 1 est 31, dont la moitié est $\frac{31}{2}$, laquelle ajoutée à la somme, donne $\frac{64}{2}$ ou 32, dont la racine cinquième est 2, plus grande partie du binome; et en étant retranchée donne 1, dont la racine cinquième est 1 pour la plus foible.

PROBLÊME II.

Trouver la racine cinquième de l'équation $x^5 = 30x^3 - 180x + 275$.

RÉSOLUTION.

Comparant l'équation donnée à l'équation générale $x^5 = 5px^3 + 5p^2x + s$, on trouve $30 = 5p$, $p = 6$, $275 = s$; substituant 6 et 275 en place des lettres p et s de la formule, on aura

$$x = \sqrt[5]{\frac{275}{2} + \sqrt{\frac{75625}{4} - 7776}} + \sqrt[5]{\frac{275}{2} - \sqrt{\frac{75625}{4} - 7776}}$$

$$x = \sqrt[5]{\frac{275}{2} + \sqrt{\frac{75625 - 31104}{4}}} + \sqrt[5]{\frac{275}{2} - \sqrt{\frac{75625 - 31104}{4}}}$$

$$x = \sqrt[5]{\frac{275}{2} + \sqrt{\frac{44521}{4}}} + \sqrt[5]{\frac{275}{2} - \sqrt{\frac{44521}{4}}}$$

$$x = \sqrt[5]{\frac{275}{2} + \frac{211}{2}} + \sqrt[5]{\frac{275}{2} - \frac{211}{2}}$$

$$x = \sqrt[5]{\frac{486}{2}} + \sqrt[5]{\frac{64}{2}}$$

$$x = \sqrt[5]{243} + \sqrt[5]{32}$$

$$x = 3 + 2$$

La racine cinquième de l'équation proposée est $5 = 3 + 2$, laquelle substituée dans l'équation $x^5 = 30x^3 - 180x + 275$, donne $3125 = 3750 + 275 - 900 = 3125$, égalité parfaite dans chaque membre de l'équation, preuve de la vérité et de la bonté de l'opération.

ÉQUATIONS DU CINQUIÈME DEGRÉ.

Ordre négatif.

On supposera la racine négative $-x=-m-n$. On supposera de plus que l'équation générale est $-x^5=-5px^3+5p^2x-s$, à laquelle il suffira de comparer le premier et le troisième terme du second membre de l'équation ordonnée proposée à résoudre ; c'est ce qu'il faut entendre, lorsqu'on dit que l'on comparera terme à terme l'équation donnée à l'équation générale. On changera de même tous les signes de la formule précédente, ce qui donnera la suivante,

$$-x=\sqrt[5]{-\frac{s}{2}-\sqrt{-\frac{s^2}{4}-p^5}}+\sqrt[5]{-\frac{s}{2}+\sqrt{-\frac{s^2}{4}-p^5}}.$$

PROBLÈME PREMIER.

Trouver la racine négative de l'équation du cinquième degré $-x^5=-10x^3--20x-33$.

RÉSOLUTION.

Comparant l'équation proposée à l'équation générale $-x^5=-5px^3+5p^2x-33$, on a $-10=-5p$, $-p=-2$, $-s=-33$; substi-

tuant les valeurs de $-p$ et de $-s$ dans la formule, on aura

$$-x=\sqrt[5]{-\tfrac{33}{2}-\sqrt{-\tfrac{1089}{4}}--32}+\sqrt[5]{-\tfrac{33}{2}+\sqrt{-\tfrac{1089}{4}}--32}$$

$$-x=\sqrt[5]{-\tfrac{33}{2}-\sqrt{-\tfrac{1089+128}{4}}}+\sqrt[5]{-\tfrac{33}{2}+\sqrt{-\tfrac{1089+128}{4}}}$$

$$-x=\sqrt[5]{-\tfrac{33}{2}-\sqrt{-\tfrac{961}{4}}}\quad+\sqrt[5]{-\tfrac{33}{2}+\sqrt{-\tfrac{961}{4}}}$$

$$-x=\sqrt[5]{-\tfrac{33}{2}--\tfrac{31}{2}}\quad+\sqrt[5]{-\tfrac{33}{2}+-\tfrac{31}{2}}$$

$$-x=\sqrt[5]{-\tfrac{2}{2}}\quad+\sqrt[5]{-\tfrac{64}{2}}$$

$$-x=\sqrt[5]{-1}\quad+\sqrt[5]{-32}$$

$$-x=-1\quad+-2$$

La racine cinquième de l'équation proposée est -3, laquelle substituée dans l'équation donnée $-x^5=-10x^3--20x-33$, rend $-243=-270-33+60=-303+60=-243$, comme l'exige la preuve de l'opération.

PROBLÊME II.

On demande la racine de l'équation $-x^5=-30x^3+180x-275$?

RÉSOLUTION.

Comparant cette équation à l'équation générale $-x^5=-5px^3+5p^2x-s$, on a $-5p=$

-30, $-p=-6$, $-s=-275$; substituant -6 et -275 en place de $-p$ et $-s$ de la formule, on aura

$$-x=\sqrt[5]{-\frac{275}{2}-\sqrt{-\frac{75625}{4}}-7776}+\sqrt[5]{-\frac{275}{2}+\sqrt{-\frac{75625}{4}}-7776}$$

$$-x=\sqrt[5]{-\frac{275}{2}-\sqrt{-\frac{75625}{4}-31104}}+\sqrt[5]{-\frac{275}{2}+\sqrt{-\frac{75625}{4}-31104}}$$

$$-x=\sqrt[5]{-\frac{275}{2}-\sqrt{-\frac{44521}{4}}}+\sqrt[5]{-\frac{275}{2}-\sqrt{-\frac{44521}{4}}}$$

$$-x=\sqrt[5]{-\frac{275}{2}--\frac{211}{2}}+\sqrt[5]{-\frac{275}{2}+-\frac{211}{2}}$$

$$-x=\sqrt[5]{-\frac{64}{2}}+\sqrt[5]{-\frac{486}{2}}$$

$$-x=\sqrt[5]{-32}+\sqrt[5]{-243}$$

$$-x=-2+-3$$

La racine demandée est -5, laquelle substituée en place d'x dans l'équation $-x^5=-30x^3+180x-275$, donne $-3125=-3750-275+900=-4025+900=-3125$, preuve complète de la vérité et bonté de l'opération.

ÉQUATIONS DE TOUS LES DEGRÉS.

On a vu par la solution des problêmes précédens, que la même formule a suffi à la résolution des équations du troisième, quatrième, cinquième degré, en observant seulement de donner

à l'exposant du radical et de la lettre p, l'exposant de l'équation particulière à résoudre. On a fait remarquer de plus, que la formule générale étoit l'expression d'une loi bien intéressante et bien satisfaisante par sa simplicité, sa clarté et sa généralité, laquelle s'appliquant à la résolution des équations de tous les degrés, met le complément à la théorie et à la pratique du calcul des équations. Voici ce qu'elle exprime.

La racine d'une équation quelconque, supérieure au premier degré, est toujours égale à la racine r *de la moitié de la somme des puissances* r *de chaque partie du binome, plus à la moitié de leur différence, le tout ajouté à la moitié de la somme des mêmes puissances, moins la moitié de leur différence.*

Ce théorème élémentaire simple et énergique est le fondement de la théorie des équations, lesquelles ont fait jusqu'ici la matière la plus embrouillée de l'analyse. On ne peut lire ce que les auteurs ont écrit sur les équations composées, sans être indisposé contre cette multitude de méthodes qui fatiguent le lecteur sans le contenter.

Formule générale pour la résolution des équations de tous les degrés.

$$x=\sqrt[r]{\frac{s}{2}+\sqrt{\frac{s^2}{4}-p^r}}+\sqrt[r]{\frac{s}{2}-\sqrt{\frac{s^2}{4}-p^r}}$$

Pour faire usage de cette formule, il faudra substituer à l'exposant indéterminé r du radical et de la lettre p, l'exposant particulier du degré de l'équation qu'on se propose de résoudre. Par exemple, si c'est une équation du troisième degré, on écrira $\sqrt[3]{\ }, -p^3$ en place de $\sqrt[r]{\ }, -p^r$. Si l'équation est du quatrième degré, on écrira $\sqrt[4]{\ }, -p^4$. On conservera le reste de la formule sans rien changer.

Comme la première partie de la formule est l'expression de la racine des moitiés de la somme et de la différence des puissances des deux quantités du binome, pour la plus grande, et de la moitié de la somme moins la moitié de la différence, pour la plus petite, il s'ensuit que si les expressions de ces sommes et de ces différences sont irrationnelles, on emploîra la voie d'approximation pour les évaluer.

APPLICATION

de la véritable Algèbre aux lieux géométriques.

LA véritable Algèbre est celle qui, dans ses opérations, n'emploie que des multiplicateurs, des quotiens, des exposans, des logarithmes positifs ; qui rejette les proportions anti-géométriques alternatives $+2 : -4 :: -4 : +8.$; qui n'admet ni racines imaginaires, ni le double signe $\pm$ dans les formules des équations du second degré, ni interruption dans la description des lignes courbes ; qui fait répondre les ordonnées négatives à des axes négatifs ; qui ne reconnoît qu'un multiplicande dans un produit, et une seule racine dans une équation quelconque ; en un mot, celle dont on a développé les principes dans cet ouvrage.

L'Algèbre que nous venons de caractériser renferme deux ordres de calcul, l'ordre positif et l'ordre négatif. Ces deux ordres étant essentiellement opposés, leur principale propriété est de se détruire mutuellement, en sorte que réduction faite de sept unités de l'ordre

positif et sept unités de l'ordre négatif, le résultat se réduit à zéro et donne $+7-7=0$; d'où il suit que toute figure géométrique régulière, de quelque dimension qu'elle soit, dont une moitié appartient à l'ordre positif et l'autre à l'ordre négatif, se réduit nécessairement à zéro; car si l'on fait la somme des élémens positifs qui composent la moitié de la surface du cercle $=+s$, et la somme des élémens négatifs qui composent l'autre moitié $=-s$, on aura pour évaluation de la surface entière, $+s-s=0$. Or, est-il rien de plus absurde qu'un cercle, qu'un corps dont la surface et la solidité $=0$? C'est cependant ce qui s'ensuit nécessairement de l'adhésion des ordonnées positives et négatives à un même axe positif.

Cette étrange conséquence n'a pas lieu lorsque les axes et les ordonnées sont du même ordre, parce qu'il résulte de cette disposition deux figures géométriques homogènes dans leurs élémens, dont l'une étant totalement positive, l'autre totalement négative, font disparoître les courbes, les surfaces, les solides, les paramètres amphibies, dont une moitié appartient à

l'ordre positif, et l'autre moitié à l'ordre négatif.

Comme la géométrie exprime par les lignes ce que l'algèbre exprime par les lettres, il faut que les lieux algébriques qui répondent aux deux ordres de calcul, soient représentés par des lieux géométriques correspondans à ces deux ordres. En conséquence nous ne suivrons pas la division des angles des co-ordonnées des courbes, telle qu'on l'a suivie jusqu'à présent, en distinguant quatre espèces d'angles ; l'angle des abscisses et des ordonnées positives ; 2°. l'angle des abscisses et ordonnées négatives ; 3°. l'angle des abscisses positives et ordonnées négatives ; 4°. l'angle des abscisses négatives et ordonnées positives. Cette division a été faite en conséquence des quatre espèces de produits de la multiplication algébrique + par +, − par −, + par − et − par +. De ces quatre espèces d'angles nous n'en retiendrons que deux relatifs aux deux ordres du calcul algébrique, les angles des abscisses et ordonnées positives, et les angles des abscisses et ordonnées négatives, ce qui établira une correspondance par-

parfaite entre les lieux algébriques et les lieux géométriques.

Pour donner une idée de la position de ces angles : Soient deux lignes droites (fig. 1ere) se coupant perpendiculairement au point C, elles formeront quatre angles A, A′, B, B′, dont les deux premiers appartiendront à l'ordre positif, et les deux seconds à l'ordre négatif, en sorte que A simple se trouvera en opposition diamétrale et non pas collatérale avec B simple, et A pointé en opposition diamétrale avec B pointé. Par cette disposition, la branche de la courbe qui se trouvera dans l'un des angles A, appartiendra à l'ordre positif, et celle qui se trouvera dans un des angles B, appartiendra à l'ordre négatif : ces branches étant doublées donneront la courbe entière dans l'un et l'autre ordre. Par un moyen aussi simple et aussi naturel il n'y aura plus de courbe, plus de paramètre amphibie, les doubles ordonnées se trouvant homogènes, de même ordre et de même espèce. On conçoit que ce n'est pas une nécessité de tracer deux courbes au lieu d'une, mais on fera usage de l'une ou de l'autre,

selon que l'espèce et la nature des lieux algébriques le demanderont.

Pour faire passer une quantité de l'ordre positif dans le négatif, et réciproquement de l'ordre négatif dans le positif, on se servira du signe — d'opération que l'on placera avant le signe de quantité ; par exemple, pour faire passer $+ a$ de l'ordre positif dans l'ordre négatif, on écrira $- + a$, expression dans laquelle on observe l'espèce primitive de la quantité qui a été changée et le signe d'opération qui a produit ce changement. Pareillement pour faire passer $- a$ de l'ordre négatif dans l'ordre positif, on écrira $- - a$, expression dans laquelle le signe — d'opération détruisant le signe — de quantité, la fait passer dans l'ordre positif. De pareilles expressions indiquent la cause et l'effet ; mais si l'on veut s'en tenir uniquement à l'effet, on fera passer $+ a$ dans l'ordre négatif, en changeant seulement le signe + en signe — et écrivant $- a$. De même pour faire passer $- a$ dans l'ordre positif on écrira simplement $+ a$. C'est ainsi que dans les lieux géométriques, pour faire passer les ordonnées

de l'ordre où elles sont, dans l'ordre opposé, il suffira de changer le signe de l'ordonnée. $\surd + a$, par exemple, passera dans l'ordre négatif, en écrivant $\surd - a$, et sous-entendant le signe d'opération.

PROBLÊME PREMIER.

Les lieux algébriques $+y = +\frac{bx}{a}$ *et* $-y = -\frac{bx}{a}$ *étant donnés, on demande les lieux géométriques correspondans?*

RÉSOLUTION.

Pour déterminer le rapport $\frac{b}{a}$, nous le supposerons un rapport d'égalité $\frac{a}{a} = 1$, ce qui changera l'équation $y = \frac{bx}{a}$, en $y = x$. Faisant x égale successivement à 1, 2, 3, 4, 5, etc. progression des nombres naturels, on aura les suites des ordonnées y, tant positives que négatives, comme elles sont marquées dans les colonnes ci-après B et D.

Abscisses positives.	*Ordonnées positives.*	*Abscisses négatives.*	*Ordonnées négatives.*
A	B	C	D
$+x=0$	$+y=0$	$-x=0$	$-y=0$
$+x=1$	$+y=+1$	$-x=-1$	$-y=-1$
$+x=2$	$+y=+2$	$-x=-2$	$-y=-2$
$+x=3$	$+y=+3$	$-x=-3$	$-y=-3$
$+x=4$	$+y=+4$	$-x=-4$	$-y=-4$
$+x=5$	$+y=+5$	$-x=-5$	$-y=-5$
$+x=6$	$+y=+6$	$-x=-6$	$-y=-6$
$+x=7$	$+y=+7$	$-x=-7$	$-y=-7$

Pour avoir le lieu géométrique de l'équation positive proposée, on tracera (fig. 2e) les angles des co-ordonnées, en tirant par un point déterminé C deux lignes DE, FG, se coupant en angle droit au point C. On prendra sur l'axe CD des abscisses positives, en partant du point C, différentes valeurs de x, telles qu'elles sont notées dans la colonne A, en commençant par $x=0$, à laquelle répond l'ordonnée $y=0$, ce qui fait voir, qu'à l'origine des abscisses, il n'y a point d'ordonnées. On prendra ensuite $x=1$; cette

unité est une grandeur arbitraire qui se prend sur la même ligne des abscisses, plus elle est foible, plus le lieu géométrique est exact. Supposons-la égale à CH; on examinera dans la colonne B des ordonnées positives, quelle est la valeur de y correspondante : on trouve $y=1$, ce qui indique que l'ordonnée est égale à l'abscisse; en conséquence on élevera sur le point H une perpendiculaire HI égale à l'abscisse CH, qui sera la première ordonnée du lieu géométrique positif cherché. On prendra ensuite une seconde abscisse $+x=2$, sur l'extrémité de laquelle on élevera une seconde ordonnée $+y=+2$. On procédera de la même façon aussi loin que l'on voudra, en traçant les abscisses et les ordonnées correspondantes selon la suite des nombres renfermés dans les deux premières colonnes A et B. La ligne CV qui passera par l'extrémité de toutes ces ordonnées, sera le lieu positif à la ligne droite de l'équation proposée $+y=+\frac{bx}{a}$, qui représentera la diagonale d'un triangle rectangle isocèle.

On suivra la même méthode pour la construction du lieu négatif $-y=-\frac{bx}{a}$. On prendra

dans la colonne C les valeurs des abscisses négatives $-x$, successivement les unes après les autres, sur l'extrémité desquelles on abaissera des ordonnées correspondantes, selon les valeurs indiquées dans la colonne D, et la ligne droite Cv, qui passera par l'extrémité de toutes ces ordonnées, sera le lieu géométrique négatif à la ligne droite.

Tous les algébristes et géomètres ont reconnu et reconnoissent les lieux géométriques négatifs à la ligne droite; mais quand il s'est agi des lieux géométriques négatifs aux lignes courbes, la crainte des imaginaires leur a fait rebrousser chemin pour aller joindre les ordonnées négatives aux positives; alliage incompatible dont le résultat ne donne que des zéros, puisque $+y-y=0$.

PROBLÊME II.

Les lieux algébriques $+y=\sqrt{+xp}$, *et* $-y=\sqrt{-xp}$ *étant donnés, on demande leurs lieux géométriques?*

RÉSOLUTION.

Pour déterminer la suite des ordonnées propres à décrire les branches de la courbe (fig. 3)

dans l'un et l'autre ordre, nous ferons la valeur constante $p=4$, et la variable x égale successivement à chaque terme de la suite des nombres naturels, en commençant par 0, et l'on aura la valeur des abscisses et ordonnées des branches de la courbe, comme elles sont notées dans les colonnes suivantes, A,B,C,D.

Abscisses positives.	*Ordonnées positives.*	*Abscisses négatives.*	*Ordonnées négatives.*
A	B	C	D
$+x=0$	$+y=0$	$-x=0$	$-y=0$
$+x=+1$	$+y=\sqrt{+4}$	$-x=-1$	$-y=\sqrt{-4}$
$+x=+2$	$+y=\sqrt{+8}$	$-x=-2$	$-y=\sqrt{-8}$
$+x=+3$	$+y=\sqrt{+12}$	$-x=-3$	$-y=\sqrt{-12}$
$+x=+4$	$+y=\sqrt{+16}$	$-x=-4$	$-y=\sqrt{-16}$
$+x=+5$	$+y=\sqrt{+20}$	$-x=-5$	$-y=\sqrt{-20}$
$+x=+6$	$+y=\sqrt{+24}$	$-x=-6$	$-y=\sqrt{-24}$
$+x=+7$	$+y=\sqrt{+28}$	$-x=-7$	$-y=\sqrt{-28}$

Pour tracer géométriquement la suite des ordonnées positives de la colonne B, on commencera par former les angles des co-ordonnées, comme on l'a fait au problême précédent. On

prendra ensuite sur l'axe CD des abscisses positives en partant du point C, la suite des $+x$, selon qu'elles sont notées dans la colonne A. Sur leurs extrémités on élevera des ordonnées y auxquelles on donnera les valeurs indiquées dans la colonne B ; et la branche de courbe qui passera par leurs extrémités sera le lieu géométrique positif correspondant au lieu algébrique proposé $+y=\sqrt{+xp}$.

Quant à la construction du lieu géométrique négatif, on procédera de la même manière, en prenant les $-x$ dans la colonne C pour les placer sur l'axe CE de la fig. 3. Après quoi on tracera la suite des $-y$ de la colonne D, suivant les valeurs qui y sont indiquées. La branche qui passera par l'extrémité de toutes ces ordonnées, sera le lieu géométrique négatif du lieu algébrique correspondant $-y=\sqrt{-xp}$. Il est visible qu'en doublant les branches positives et négatives, on formera deux courbes entières, l'une composée totalement d'élémens positifs, l'autre totalement d'élémens négatifs, ce qui annulle les courbes, les surfaces et les paramètres amphibies. La courbe que nous

venons de tracer est une des sections coniques dont le plan coupant est parallèle au côté du cône et porte le nom de *parabole.*

PROBLÊME III.

Les lieux algébriques $+y=+\sqrt{2ax-xx}$ *et* $-y=-\sqrt{2ax-xx}$ *étant donnés, on demande d'en tracer les lieux géométriques?*

RÉSOLUTION.

Faisant $a=5$ valeur constante, et les variables x égales à la suite des nombres naturels, on aura pour la suite des abscisses et ordonnées, tant positives que négatives, les valeurs des x et des y, telles qu'elles sont déterminées dans les colonnes suivantes.

A	B	C	D
$+x=0$	$+y=0$	$-x=0$	$-y=0$
$+x=+1$	$+y=\sqrt{+9}$	$-x=-1$	$-y=\sqrt{-9}$
$+x=+2$	$+y=\sqrt{+16}$	$-x=-2$	$-y=\sqrt{-16}$
$+x=+3$	$+y=\sqrt{+21}$	$-x=-3$	$-y=\sqrt{-21}$
$+x=+4$	$+y=\sqrt{+24}$	$-x=-4$	$-y=\sqrt{-24}$
$+x=+5$	$+y=\sqrt{+25}$ Max.	$-x=-5$	$-y=\sqrt{-25}$
$+x=+6$	$+y=\sqrt{+24}$	$-x=-6$	$-y=\sqrt{-24}$

$+x=+7$ $+y=\sqrt{+21}$ $-x=-7$ $-y=\sqrt{-21}$

$+x=+8$ $+y=\sqrt{+16}$ $-x=-8$ $-y=\sqrt{-16}$

$-x=+9$ $+y=\sqrt{+9}$ $-x=-9$ $-y=\sqrt{-9}$

$+x=+10$ $+y=+0$ $-x=-10$ $-y=-0$

Pour construire le lieu géométrique positif selon le cours des abscisses et des ordonnées, dont les valeurs sont déterminées dans les colonnes A et B, on commencera par former les angles des co-ordonnées; on prendra ensuite sur l'axe CD dix parties égales, nombre des abscisses auquel ont s'est fixé. Les valeurs des ordonnées correspondantes se prendront dans la colonne B des $+y$ que l'on placera dans l'angle DCF, et la ligne qui passera par l'extrémité de ces ordonnées, formera la branche positive de la courbe, laquelle dans le cas présent est une demi-circonférence qui détermine le lieu géométrique relatif au lieu algébrique $+y=\sqrt{+2ax-xx}$.

Quant au lieu géométrique de la branche négative, laquelle ne doit différer de la branche positive qu'en position, nullement en figure, on procédera de la même façon en prenant sur

l'axe CE dix abscisses égales, et autant d'ordonnées, selon les valeurs indiquées dans la colonne D des $-y$, que l'on placera dans l'angle ECG diamétralement opposé à l'angle des positives DCF. La ligne qui passera par l'extrémité de toutes ces ordonnées, formera la branche négative de la courbe, qui sera une demi-circonférence et déterminera le lieu géométrique négatif correspondant au lieu algébrique $-y = \sqrt{-2ax+xx}$ ou $-y = -\sqrt{2ax-xx}$.

Comme dans la formation des ordonnées négatives de la colonne D, on a seulement changé le signe + de la valeur des ordonnées positives en signe —, on pourroit objecter qu'il ne suffit pas de changer le signe de la valeur de l'ordonnée, mais qu'il faut l'extraire du lieu algébrique négatif, de la même manière qu'on a extrait la valeur de l'ordonnée positive du lieu algébrique positif.

R. Pour satisfaire à cette observation sans sortir du problême actuel : Soit donné le lieu positif $+y = \sqrt{2ax-xx}$; supposant $a = 5$ et $x = 1$, on aura $+y = \sqrt{+10-1} = \sqrt{+9} = +3$. Il s'agit de faire voir que dans le lieu négatif

$-y=\sqrt{-2ax+xx}$, c'est une chose égale d'extraire la valeur de l'ordonnée du lieu négatif proposé, ou de changer le signe + de la valeur de l'ordonnée positive en signe —; en effet, $-y=\sqrt{-2ax+xx}$ donne $-y=\sqrt{-10+1}=\sqrt{-9}=-3$. Or, en changeant le signe du lieu positif $+y=\sqrt{+9}$, on obtient $-y=\sqrt{-9}=-3$; donc c'est une chose égale d'extraire la valeur des ordonnées négatives du lieu négatif, ou de changer le signe + de la valeur de l'ordonnée positive, en signe —, comme on a fait.

PROBLÈME IV.

Les lieux algébriques $+y=+\left(\sqrt{\frac{2apx-pxx}{2a}}\right)$ *et* $-y=-\left(\sqrt{\frac{2apx-pxx}{2a}}\right)$ *étant donnés, on demande d'en tracer les lieux géométriques?*

RÉSOLUTION.

Faisant $a=6$, p valeur également constante $=5$, et x successivement égale à 1, 2, 3, 4, etc. suite des nombres naturels, on aura celle des abscisses et ordonnées, tant positives que négatives, comme elles sont notées dans les colonnes suivantes, A,B,C,D.

A	B	C	D
$+x=0$	$+y=0$	$-x=0$	$-y=0$
$+x=+1$	$+y=\sqrt{+\frac{55}{12}}$	$-x=-1$	$-y=\sqrt{-\frac{55}{12}}$
$+x=+2$	$+y=\sqrt{+\frac{100}{12}}$	$-x=-2$	$-y=\sqrt{-\frac{100}{12}}$
$+x=+3$	$+y=\sqrt{+\frac{125}{12}}$	$-x=-3$	$-y=\sqrt{-\frac{125}{12}}$
$+x=+4$	$+y=\sqrt{+\frac{150}{12}}$	$-x=-4$	$-y=\sqrt{-\frac{150}{12}}$
$+x=+5$	$+y=\sqrt{+\frac{175}{12}}$	$-x=-5$	$-y=\sqrt{-\frac{175}{12}}$
$+x=+6$	$+y=\sqrt{+\frac{180}{12}}$ Max.	$-x=-6$	$-y=\sqrt{-\frac{180}{12}}$
$+x=+7$	$+y=\sqrt{+\frac{175}{12}}$	$-x=-7$	$-y=\sqrt{-\frac{175}{12}}$
$+x=+8$	$+y=\sqrt{+\frac{150}{12}}$	$-x=-8$	$-y=\sqrt{-\frac{150}{12}}$
$+x=+9$	$+y=\sqrt{+\frac{125}{12}}$	$-x=-9$	$-y=\sqrt{-\frac{125}{12}}$
$+x=+10$	$+y=\sqrt{+\frac{100}{12}}$	$-x=-10$	$-y=\sqrt{-\frac{100}{12}}$
$+x=+11$	$+y=\sqrt{+\frac{55}{12}}$	$-x=-11$	$-y=\sqrt{-\frac{55}{12}}$
$+x=+12$	$+y=0$	$-x=-12$	$-y=0$

Pour construire le lieu géométrique relatif au lieu algébrique proposé, on formera les angles des co-ordonnées (fig. 4), après quoi on déterminera sur l'axe CD une suite d'abscisses, selon les valeurs notées dans la colonne A, dont l'origine se prendra au point C, sommet de la courbe. Sur ces abscisses on élevera des ordonnées, selon les valeurs marquées dans la colonne B des $+y$. La branche de courbe qui

passera par l'extrémité de chaque ordonnée, sera le lieu géométrique positif correspondant au lieu algébrique positif $+y=+\left(\frac{2apx-pxx}{2a}\right)$. En doublant cette branche de courbe, on aura une courbe entière qui porte le nom d'*ellipse;* elle résulte de la section du cône coupé transversalement par un plan oblique à son grand axe, et forme une courbe rentrante.

On procédera de la même manière à la construction du lieu géométrique négatif, d'où résultera une seconde ellipse qui ne différera de la première qu'en position, nullement en figure.

On aura l'attention de prendre l'origine des abscisses et des ordonnées au sommet de la courbe, pour en former une suite ascendante, et non depuis le centre de la courbe auquel répond le *maximum* des ordonnées, parce qu'il est déraisonnable de prendre l'origine d'une chose au terme de son plus grand accroissement; c'est confondre le *maximum* avec le *minimum*. Comme il seroit ridicule de prendre la source d'un fleuve à son embouchure, il ne l'est pas moins de prendre le sommet d'une

ellipse à sa plus grande largeur. Il ne suffit pas de dire que la distance du centre au sommet est la même que celle du sommet au centre de la courbe ; il faudroit de plus que la direction du centre au sommet fût la même que celle du sommet au centre : mais les directions, bien loin d'être telles, se trouvent entièrement opposées l'une à l'autre. Le terme d'*origine* annonce un accroissement et non pas une diminution, telle qu'elle se rencontre en prenant l'origine des ordonnées depuis le centre de la courbe. C'est renverser les idées que de dire qu'on peut prendre également l'origine des ordonnées d'une courbe à sa plus petite ou à sa plus grande ordonnée. Compter les ordonnées depuis le centre, c'est rétrograder, et le terme de rétrogradation n'est pas celui d'origine. On ne peut trop élaguer dans les sciences exactes les termes qui détruisent les idées.

PROBLÊME V.

Les lieux algébriques $+y=+\left(\sqrt{\frac{2apx+pxx}{2a}}\right)$ *et* $-y=-\left(\sqrt{\frac{2apx+pxx}{2a}}\right)$ *étant donnés, on demande de tracer leurs lieux géométriques?*

RÉSOLUTION.

Soient les valeurs constantes $a=6, p=5$, et les variables x égales à la succession des nombres naturels 1, 2, 3, 4, etc. on aura la suite des abscisses et ordonnées positives, comme elles sont marquées dans les colonnes suivantes, A et B, et les abscisses et ordonnées négatives, comme elles sont indiquées dans les colonnes C et D.

A	B	C	D
$x=+0$	$+y=0$	$-x=0$	$-y=0$
$x=+1$	$+y=\sqrt{+\frac{65}{12}}$	$-x=-1$	$-y=\sqrt{-\frac{65}{12}}$
$x=+2$	$+y=\sqrt{+\frac{140}{12}}$	$-x=-2$	$-y=\sqrt{-\frac{140}{12}}$
$x=+3$	$+y=\sqrt{+\frac{225}{12}}$	$-x=-3$	$-y=\sqrt{-\frac{225}{12}}$
$x=+4$	$+y=\sqrt{+\frac{320}{12}}$	$-x=-4$	$-y=\sqrt{-\frac{320}{12}}$
$x=+5$	$+y=\sqrt{+\frac{425}{12}}$	$-x=-5$	$-y=\sqrt{-\frac{425}{12}}$
$x=+6$	$+y=\sqrt{+\frac{540}{12}}$	$-x=-6$	$-y=\sqrt{-\frac{540}{12}}$
$x=+7$	$+y=\sqrt{+\frac{665}{12}}$	$-x=-7$	$-y=\sqrt{-\frac{665}{12}}$
$x=+8$	$+y=\sqrt{+\frac{800}{12}}$	$-x=-8$	$-y=\sqrt{-\frac{800}{12}}$

Pour construire le lieu géométrique positif correspondant au lieu algébrique proposé, on tirera une ligne $Ss = +2a$ qui représentera l'axe en dehors de la courbe. On prendra S pour sommet de la branche positive; et sur le prolongement de l'axe, on prendra la suite des abscisses SH, comme elles sont notées dans la colonne A, auxquelles on fera répondre les ordonnées positives HI, selon les valeurs déterminées dans la colonne B. La ligne qui passera par l'extrémité de ces ordonnées, sera le lieu géométrique positif de l'équation proposée. Cette ligne est une branche d'hyperbole, laquelle étant doublée, donne l'hyperbole entière positive; elle est une des sections coniques dont le plan coupant est parallèle à l'axe du cône.

La construction du lieu négatif se fera en sens contraire; l'axe, qui étoit $Ss = +2a$, deviendra l'axe ponctué $sS = -2a$. $+x$ se changera en $-x$. $+y$ en $-y$. Le sommet de la branche hyperbolique négative se prendra au point s, et les abscisses négatives sur le prolongement de l'axe négatif $-2a$; après quoi on se dirigera pour la suite des abscisses et or-

données négatives, conformément à leur valeur indiquée dans les colonnes précédentes, C et D, d'où résultera une seconde hyperbole parfaitement semblable à la première, la position seule exceptée. Comme notre objet est uniquement d'appliquer les deux ordres de calcul algébrique aux lieux géométriques, nous n'entrerons point dans le détail des propriétés des courbes qui se trouvent dans tous les livres de géométrie, et auxquels ceux qui auroient envie de s'en instruire peuvent avoir recours.

Les problèmes suivans sont extraits de l'*Analyse des courbes par M. Cramer.* On prie le lecteur de donner une attention particulière à la direction des branches négatives des courbes de l'auteur, tant dans l'expression de la suite des ordonnées, que dans leur description géométrique; il y observera la singularité, la difformité, la bizarrerie la mieux caractérisée, conséquence nécessaire des faux principes qui en ont dirigé le cours.

PROBLÊME VI.

Les lieux algébriques $+y=+\left(\frac{xx}{6a}+x+\frac{5}{6a}\right)$ *et* $-y=-\left(\frac{xx}{6a}+x+\frac{5}{6a}\right)$ *étant donnés, on demande de tracer leurs lieux géométriques?*

RÉSOLUTION.

Faisant $a=1$, on aura la suite des abscisses et ordonnées positives, comme elles sont indiquées dans les colonnes suivantes, A et B, et celle des abscisses et ordonnées négatives, comme elles le sont dans les colonnes C et D.

A	B	C	D
$+x=0$	$+y=+\frac{5}{6}$	$-x=0$	$-y=-\frac{5}{6}$
$+x=+1$	$+y=+\frac{12}{6}$	$-x=-1$	$-y=-\frac{12}{6}$
$+x=+2$	$+y=+\frac{21}{6}$	$-x=-2$	$-y=-\frac{21}{6}$
$+x=+3$	$+y=+\frac{32}{6}$	$-x=-3$	$-y=-\frac{32}{6}$
$+x=+4$	$+y=+\frac{45}{6}$	$-x=-4$	$-y=-\frac{45}{6}$
$+x=+5$	$+y=+\frac{60}{6}$	$-x=-5$	$-y=-\frac{60}{6}$
$+x=+6$	$+y=+\frac{77}{6}$	$-x=-6$	$-y=-\frac{77}{6}$
$+x=+7$	$+y=+\frac{96}{6}$	$-x=-7$	$-y=-\frac{96}{6}$
$+x=+8$	$+y=+\frac{117}{6}$	$-x=-8$	$-y=-\frac{117}{6}$
$+x=+9$	$+y=+\frac{140}{6}$	$-x=-9$	$-y=-\frac{140}{6}$

Pour tracer la branche positive de la courbe résultante du lieu positif proposé, on prendra le point A (fig. 7) pour l'origine des abscisses, désigné dans la colonne des abscisses par $x=0$; et parce qu'à cette abscisse x répond l'ordonnée $y=\frac{1}{6}$, on prendra sur AC une partie Aa égale à $\frac{1}{6}$ de l'unité qu'on aura déterminée : ce sera la première ordonnée. Les autres se prendront successivement dans les proportions indiquées dans la colonne B, et la branche *aimò* qui passera par les extrémités de toutes ces ordonnées, sera le lieu géométrique positif du lieu algébrique proposé.

On tracera la branche négative dans un sens opposé à la positive. A cet effet, on prendra les abscisses sur la ligne AD, dont l'origine est désignée dans les colonnes du lieu négatif par $-x=-\frac{1}{6}$. En conséquence on prendra sur AE une partie A$a=\frac{1}{6}$: ce sera la première ordonnée négative. Les autres se tireront parallèlement à la première ; on leur donnera les valeurs indiquées dans la colonne D, et la branche *aimo*, qui terminera toutes ces ordonnées, sera le lieu géométrique correspondant au lieu algébrique dans l'ordre négatif.

La méthode que nous avons suivie jusqu'à présent pour l'application des lieux algébriques aux lieux géométriques, est une méthode générale simple, claire, satisfaisante, sans ambages, sans racines imaginaires, conforme à la raison et à la nature de la chose. Ce sera au lecteur à juger si l'on en peut dire autant de l'application des principes de M. Cramer à la direction des branches négatives des courbes. Pour en juger plus sainement, nous rapporterons la suite des ordonnées qui ont dirigé le cours de la courbe concernant le problême actuel, à quoi nous ajouterons l'expression figurée de ces mêmes suites, et l'application qu'en donne l'auteur.

A	B	C	D
$x=0$	$y=+\frac{5}{6}$	$x=0$	
$x=+1$	$y=+\frac{12}{6}$	$x=1$	$-y=0$
$x=+2$	$y=+\frac{21}{6}$	$x=2$	$-y=-\frac{3}{6}$
$x=+3$	$y=+\frac{32}{6}$	$x=3$	$-y=-\frac{4}{6}$
$x=+4$	$y=+\frac{45}{6}$	$x=4$	$-y=-\frac{3}{6}$
$x=+5$	$y=+\frac{60}{6}$	$x=5$	$-y=-0$
$x=+6$	$y=+\frac{77}{6}$	$x=6$	$-y=+\frac{5}{6}$
$x=+7$	$y=+\frac{96}{6}$	$x=7$	$-y=+\frac{12}{6}$
Branche positive selon M. Cramer.		Branche négative selon M. Cramer.	

En considérant la suite des ordonnées positives de la colonne B, on y apperçoit une loi qui la dirige ; c'est une suite bien ordonnée à laquelle celle que nous avons donnée est parfaitement semblable. Mais quand on jette l'œil sur la suite des ordonnées négatives qui composent la colonne D, on n'y apperçoit ni loi, ni régularité, ni ressemblance quelconque à la suite des ordonnées positives dont elle devoit conserver les mêmes chiffres précédés du signe — au lieu du signe +. Cependant de toutes les ordonnées négatives de la colonne D, aucune n'a l'expression convenable.

La première ordonnée, en comptant $x = 0$ pour la première abscisse, qui devoit donner $-\frac{5}{6}$ par opposition à $+\frac{5}{6}$, ne donne rien du tout, pas même zéro, comme il est d'usage quand l'ordonnée répond à l'origine des abscisses.

La seconde, qui devoit donner $-\frac{12}{6}$, donne $-y = 0$.

La troisième, au lieu de $-\frac{21}{6}$, donne $-y = -\frac{3}{6}$.

La quatrième, au lieu de $-\frac{32}{6}$, donne $-y = -\frac{4}{6}$.

La cinquième, au lieu de $-\frac{45}{6}$, donne $-y = -\frac{3}{6}$.

La sixième, au lieu de $-\frac{60}{6}$, donne $-y = 0$.

La septième, au lieu de $-\frac{77}{6}$, donne $+y=+\frac{1}{6}$ en valeur positive.

La huitième, au lieu de $-\frac{96}{6}$, donne $+y=+\frac{12}{6}$ en valeur positive.

Telle est la suite irrégulière des ordonnées négatives de la colonne D, qui ont servi à la construction du cours bizarre de la branche négative *aefghilm* (fig.8), laquelle comparée à la branche positive *abcd*, n'a ni rapport, ni ressemblance avec elle, quoique émanant l'une et l'autre d'une même loi. Au reste, il est facile dans nos principes de rendre raison d'un procédé si vicieux.

Quand il s'est agi de transformer l'équation $y=\frac{xx}{6a}+x+\frac{1}{6}a$ de positive en négative, M. Cramer, au lieu de changer tous les termes positifs en négatifs, n'a changé que les signes des variables linéaires, en laissant subsister ceux des puissances positives et de la constante $+\frac{1}{6}a$: dès-lors il s'est fait un conflit entre ces deux espèces de quantités opposées; tantôt les quantités négatives linéaires l'emportoient sur les puissances positives; tantôt c'étoient les puissances positives qui prenoient le dessus;

tantôt il se formoit une égalité entre les deux, qui annulloit les ordonnées. De là la bizarrerie du cours de cette branche négative, qui se trouve tantôt couper la ligne des abscisses, tantôt occuper sa partie inférieure, tantôt occuper la partie supérieure, jusqu'à s'élancer dans l'infini. Nous observerons que M. Cramer a laissé subsister le signe de la constante $+\frac{5}{6}a$, parce qu'elle étoit une constante ; mais une constante n'est pas dénommée *constante*, en sorte qu'elle ne puisse varier son signe, mais parce que le nombre de ses unités ne peut varier, soit dans l'ordre positif, soit dans l'ordre négatif. Voici l'explication que l'auteur donne lui-même du cours singulier de cette branche négative.

« Pour connoître, dit-il, le cours de cette « ligne du côté des abscisses négatives, on « fera x négative, ce qui change l'équation « $y=\frac{xx}{6a}+x+\frac{5}{6}a$ en $y=\frac{xx}{6a}-x+\frac{5}{6}a$. »

R. Voilà le foyer des erreurs. L'équation doit être changée comme il suit, $-y=-\frac{xx}{6a}-x-\frac{5}{6}a$, qui donnera la même suite régulière que celle que nous avons trouvée en subs-

tituant le signe — au signe + des ordonnées positives.

« L'abscisse x continuant à croître du côté « négatif, les ordonnées deviennent négatives, « et restent négatives jusqu'à ce que x soit « devenue $5a = AI$; alors l'ordonnée est de « nouveau égale à zéro ($y = \frac{25aa}{6a} - 5a + \frac{1}{6}a = 0$). « La courbe, après s'être enfoncée au dessous « de l'axe des abscisses jusqu'à un certain « terme, remonte et coupe de nouveau cet « axe au point I éloigné de l'origine A de la « distance $5a$. L'abscisse x continuant à croître « toujours du côté négatif, l'ordonnée y rede- « vient positive et se trouve égale à la première « ordonnée Aa ($\frac{1}{6}a$), quand x vaut $6a$. Après « quoi x croissant toujours, le terme positif « $\frac{xx}{6a}$ l'emporte toujours sur le terme négatif « $-x$, et l'ordonnée y va toujours en augmen- « tant à mesure que l'abscisse augmente, ce « qui donne la branche infinie Im, qui s'éloigne « à l'infini. »

R. Il est impossible de reconnoître dans la description que M. Cramer fait des irrégularités de la branche négative de sa courbe,

l'unité de loi qui doit présider à la direction de l'une et l'autre branche, puisque procédant d'une même équation, les traits doivent être semblables, la position seule exceptée dépendante des signes + et —. L'explication embrouillée que donne l'auteur d'une suite d'ordonnées si irrégulière et d'une branche dont la direction est si bizarre, est une preuve que la véritable algèbre ni la géométrie n'ont aucune part à un semblable procédé.

Il n'en est pas ainsi de la branche négative que nous avons tracée, dont la loi d'une même équation se manifeste également dans l'une et l'autre branche. On a opéré avec la plus grande facilité, puisque l'on a seulement changé le signe + de chaque ordonnée positive en signe —, que nous avons prouvé faire le même effet que le changement de signe de chaque terme de l'équation positive; car soit l'équation positive $y = +\frac{xx}{6} + x + \frac{1}{6}$, supposant $x = 6$, on aura par substitution, $y = +\frac{36}{6} + \frac{36}{6} + \frac{1}{6} = +\frac{77}{6}$. En changeant les signes de tous les termes, il vient $-y = -\frac{36}{6} - \frac{36}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{77}{6}$, valeur égale à celle qui résulte du changement de signe de l'ordonnée

positive $+\frac{77}{6}$ en $-\frac{77}{6}$. C'est donc une chose égale de changer les signes de chaque terme d'une équation positive, ou de changer seulement le terme positif + du résultat en signe —, comme nous avons fait; par où l'on voit non-seulement l'inutilité et la superfluité des opérations de M. Cramer, mais de plus, le vice de son procédé, qui se manifeste d'une manière sensible, tant dans l'irrégularité de la suite des ordonnées de la branche négative de sa courbe, que dans la bizarrerie de son cours. V. (fig. 8).

PROBLÊME VII.

Les lieux algébriques $+y=+\left(\frac{axx}{xx+2ax+aa}\right)$ *et* $-y=-\left(\frac{axx}{xx+2ax+aa}\right)$ *étant donnés, on demande leurs lieux géométriques?*

RÉSOLUTION.

Faisant $a=1$ et x successivement 1, 2, 3, 4, 5, etc. on aura la suite des ordonnées positives et négatives, comme elles sont déterminées dans les colonnes ci-après, B et D.

A	B	C	D
$+x=0$	$+y=0$	$-x=0$	$-y=0$
$+x=+1$	$+y=+\frac{1}{4}$	$-x=-1$	$-y=-\frac{1}{4}$
$+x=+2$	$+y=+\frac{4}{9}$	$-x=-2$	$-y=-\frac{4}{9}$
$+x=+3$	$+y=+\frac{9}{16}$	$-x=-3$	$-y=-\frac{9}{16}$
$+x=+4$	$+y=+\frac{16}{25}$	$-x=-4$	$-y=-\frac{16}{25}$
$+x=+5$	$+y=+\frac{25}{36}$	$-x=-5$	$-y=-\frac{25}{36}$
$+x=+6$	$+y=+\frac{36}{49}$	$-x=-6$	$-y=-\frac{36}{49}$
$+x=+7$	$+y=+\frac{49}{64}$	$-x=-7$	$-y=-\frac{49}{64}$

Si l'on considère la colonne B des ordonnées positives, et la colonne D des ordonnées négatives, on verra que la différence consiste uniquement dans les signes + et — qui forment le distinctif des deux ordres de calcul, lesquels indiquent dans les lieux géométriques, la position et contre-position des branches de courbe. Quant aux caractères numériques qui déterminent la proportion des ordonnées, ils sont parfaitement semblables ; et parce que de cette ressemblance d'ordonnées dépend la figure de la courbe, on en doit conclure que les branches négatives des courbes doivent être figurées de la même manière que les branches

positives, comme procédant de la même équation et d'une même loi.

Il est facile à présent de découvrir dans ces observations le germe des irrégularités et bizarreries du cours des branches négatives de la figure 8; mais celui de la figure 10 concernant le problême actuel, enchérit encore sur celui du problême précédent, comme nous allons le prouver par comparaison.

A	B	C	D
$x=0$	$y=0$	$x=0$	$y=0$
$x=1$	$y=\frac{1}{4}$	$x=-\frac{1}{4}$	$y=\frac{1}{9}$
$x=2$	$y=\frac{4}{9}$	$x=-\frac{1}{2}$	$y=1$
$x=3$	$y=\frac{9}{16}$	$x=-\frac{3}{4}$	$y=9$
$x=4$	$y=\frac{16}{25}$	$x=-1$	$y=$ infini
$x=5$	$y=\frac{25}{36}$	$x=-\frac{3}{2}$	$y=9$
$x=6$	$y=\frac{36}{49}$	$x=-2$	$y=4$
$x=7$	$y=\frac{49}{64}$	$x=-\frac{5}{2}$	$y=\frac{9}{4}$

Si l'on compare la colonne B des ordonnées positives avec la colonne D des ordonnées négatives, on observera dans la première une régularité parfaite, une suite bien ordonnée et la loi qui préside à sa direction, conforme en

tout à celle que nous avons formée : mais si on jette l'œil sur la colonne D, on n'y comprend rien du tout ; c'est une suite d'ordonnées négatives qui sont toutes positives, quoique les abscisses soient négatives, et dont aucune ordonnée n'a ses caractères numériques semblables à ceux des ordonnées positives correspondantes. On n'apperçoit dans cette suite, ni ordre, ni loi ; c'est une discordance continuée dont voici l'explication.

« Du côté des abscisses négatives, dit M. Cramer « (fig. 10), le cours de cette courbe est plus « singulier. Pour le reconnoître, on fera x né- « gative dans l'équation $xxy+2axy-axx+$ « $aay=0$, qui se réduit à $y=a\left(\frac{x}{a-x}\right)^2$ ou $a\left(\frac{x}{x-a}\right)^2$, « suivant que x est plus grande ou plus petite « que a. Il est clair que plus x augmente, plus « le numérateur de la fraction $\frac{x}{a-x}$ augmente, « et plus le dénominateur diminue. L'augmen- « tation de l'un et la diminution de l'autre « concourent à faire augmenter la fraction ; « ainsi l'ordonnée $y=a\left(\frac{x}{a-x}\right)^2$ augmente avec « l'abscisse, mais si rapidement qu'elle de-

« vient infinie, quand l'abscisse x (AC) est « devenue égale à a; car alors y (CD) est « $= a\left(\frac{a}{a-a}\right)^2 = \frac{a^3}{00}$. Or une grandeur finie a^3 « divisée par zéro, représente l'infini, parce « que le fini contient une infinité de fois le « zéro, ou plutôt l'infiniment petit. Après cela « l'abscisse x étant plus grande que a, l'or- « donnée $y = a\left(\frac{x}{x-a}\right)^2$ est d'abord excessive- « ment grande, parce que le dénominateur $x-a$ « est excessivement petit; mais à mesure que « x augmente, le dénominateur augmente, et « même dans une plus grande proportion que « le numérateur, de sorte que la fraction di- « minue et avec elle l'ordonnée y. Cependant « cette diminution a ses bornes; car quand « l'abscisse est infinie, le dénominateur $x-a$ « est censé égal au numérateur x, puisqu'il n'en « diffère que de la grandeur finie a.... Cette « branche EF de la courbe qui répond aux « abscisses négatives plus grandes que a, vient « donc de l'infini en s'approchant de l'axe des « abscisses, mais elle n'en approche pas plus « que de la distance a. »

R. Il ne faudroit point d'autre preuve de la

fausseté des principes qui ont dirigé le cours de cette branche négative, que l'explication prolixe qu'en donne l'auteur. En effet, quand M. Cramer s'est proposé de former la branche négative de sa courbe, il ne pouvoit avoir en vue que de décrire une suite d'ordonnées opposées aux positives, lesquelles par cette seule raison d'opposition deviennent négatives. Or, que faut-il pour transformer une ordonnée positive en négative? Il ne faut que changer le signe + qui précède sa valeur, en signe —, ce qui la rend négative. Par cette seule disposition, la loi de la même équation préside à la direction de l'une et l'autre branche, et la différence consiste uniquement dans la position et non dans la dissemblance de figure que l'auteur appelle, dans le cas présent, *branche d'un cours singulier.*

Il est vraiment singulier qu'une ordonnée croisse si rapidement, qu'avant d'être parvenue à la fin de sa première abscisse, elle aille s'élancer dans l'infini, et après un séjour dans cette région inconnue, indiqué par un vuide sur l'axe des abscisses, elle descende de l'infini pour

former une branche entièrement isolée du tronc dont elle fait partie. Voyez la branche FE de la figure 10. Comme la singularité du cours de cette branche est conforme aux principes reçus, qu'elle se trouve diamétralement opposée aux vrais principes du calcul, nous allons faire usage de ces derniers, comme nous avons fait dans le problême précédent, pour rendre raison des procédés vicieux qui ont concouru à une telle opération.

Quand il s'est agi de transformer l'équation positive $xxy+2axy-axx+aay=0$ en négative, M. Cramer a seulement transformé $+2axy$ en $-2axy$, où se trouve la variable linéaire x, et a laissé subsister les signes des termes où étoient ses puissances, ce qui lui a donné $xxy-2axy-axx+aay=0$; fausse équation transformée, qui eût dû être changée en $-xxy-2axy+axx-aay=0$, dont chaque terme étant affecté d'un signe opposé, eût donné $-y=-\left(\frac{axx}{xx+2ax+aa}\right)$ avec la même suite d'ordonnées négatives que celle que nous avons obtenue par le seul changement de signe des ordonnées positives. Cette fausse transfor

mation est une des principales causes du cours singulier et vicieux de la branche négative de M. Cramer, qui, n'ayant changé que le signe de la variable linéaire x, a laissé subsister les signes de ses puissances xx, d'où est résultée une espèce de conflit entre ces deux quantités, lesquelles, selon leur degré de valeur, occasionnoient tantôt des élévations, tantôt des abaissemens, tantôt des disparitions totales de courbe, ce qui donne, à la direction de la branche, le cours le plus singulier et le plus bizarre.

Les équations $y = a\left(\frac{a}{a-x}\right)^2$ et $y = a\left(\frac{x}{x-a}\right)^2$ que M. Cramer suppose être égales, ne le sont point; il faudroit pour cela que le carré du dénominateur de la première fraction $a - x$ fût égal au carré du dénominateur de la seconde $x - a$, ensorte que l'on eût $(a-x)^2 = (x-a)^2$, ce qui n'est pas : car soit $a = 5$, $x = 3$, on aura pour le carré du premier dénominateur, $5-3 \times 5-3 = +4$, et pour le carré du second, $3-5 \times 5-3 = -4$, valeurs diamétralement opposées.

Une autre erreur est l'expression $\frac{a^3}{\circ\circ}$ que M. Cramer dit représenter une grandeur infinie, « parce que, dit-il, une grandeur finie, divisée

« par le zéro représente l'infini, et que le fini « contient une infinité de fois le zéro, ou plutôt « l'infiniment petit. »

R. Dans l'exemple proposé $\frac{a^3}{\circ\circ}$, M. Cramer ne peut pas prendre zéro pour un infiniment petit, puisqu'il résulte de $+a - a = \circ$ qui représente le rien absolu, en ce que $+a$ est détruit dans sa totalité par la négative $-a$, qui l'absorbe entièrement. De plus, $\frac{a^3}{\circ\circ}$ ne peut pas représenter un infiniment grand, $\frac{a^3}{-a}$ étant plus grand que lui; car $-a$, comme quantité négative, étant au dessus de zéro, selon ceux qui admettent des logarithmes négatifs, donne nécessairement une fraction plus forte que $\frac{a^3}{\circ\circ}$. Disons donc avec plus de vérité, que $\frac{a^3}{\circ\circ}$, bien loin de représenter un infiniment grand, ne représente rien du tout. 1°. Parce qu'il n'existe aucun rapport entre le rien et le fini. 2°. Parce que zéro faisant la fonction de dénominateur de la fraction, le numérateur a^3 ne peut être qu'une partie ou un multiple du dénominateur, ce qui, dans l'une et l'autre supposition, ne donne autre chose que zéro. Or, quelle distance entre le zéro et l'infiniment grand !

Une chose remarquable dans les branches négatives de M. Cramer, est l'interruption subite du cours de la branche à la rencontre d'une imaginaire désignée par un espace vuide sur la ligne des abscisses, effet surprenant, sans cause, puisque les imaginaires n'ayant aucune existence possible, ne peuvent être cause d'un effet quelconque.

PROBLÊME VIII.

Les équations $+y^4 - 96yy - x^4 + 100xx = 0$, *et* $-y^4 = +96yy + x^4 - 100xx = 0$ *étant données, trouver la suite de leurs ordonnées et tracer le lieu géométrique de l'une et l'autre courbe.* (Fig. 11).

RÉSOLUTION.

Les équations proposées étant des équations-produits, on changera l'équation positive en équation-puissance, pour en extraire plus facilement la suite des ordonnées positives, dont on changera tous les signes, pour avoir la suite de la seconde équation en ordonnées négatives.

Soit donc $y^4 - 96yy - x^4 + 100xx = 0$. On

transportera les deux derniers termes du premier membre dans le second, ce qui donnera $y^4 - 96yy = x^4 - 100xx$. On retranchera de chaque membre le carré de la moitié du coefficient; il viendra l'égalité suivante, $y^4 - 96yy - -2304 = x^4 - 100xx - - -2304$. Extrayant la racine de part et d'autre, on a $y^2 - 48 = \sqrt{x^4 - 100xx + 2304}$, ou en faisant passer 48 dans le second membre, $y^2 = 48 + \sqrt{x^4 - 100xx + 2304}$. Extrayant encore la racine de part et d'autre, on obtient $y = \sqrt{48 + \sqrt{x^4 - 100xx + 2304}}$, équation dont on formera la suite des coordonnées de la courbe, comme il suit, en valeurs décimales.

A	B	C	D
$+x = 0$	$+y = +9.798$	$-x = 0$	$-y = -9.798$
$+x = +1$	$+y = +9.744$	$-x = -1$	$-y = -9.744$
$+x = +2$	$+y = +9.582$	$-x = -2$	$-y = -9.582$
$+x = +3$	$+y = +9.302$	$-x = -3$	$-y = -9.302$
$+x = +4$	$+y = +8.837$	$-x = -4$	$-y = -8.837$
$+x = +5$	$+y = +8.289$	$-x = -5$	$-y = -8.289$
$+x = +6$	$+y = +6.928$	$-x = -6$	$-y = -6.928$
$+x = +7$	$+y = +5.916$	$-x = -7$	$-y = -5.916$
$+x = +8$	$+y = +6.928$	$-x = -8$	$-y = -6.928$

$+x=+9$ $+y=+8.698$ $-x=-9$ $-y=-8.698$
$+x=+10$ $+y=+9.798$ $-x=-10$ $-y=-9.798$
$+x=+11$ $+y=+10.845$ $-x=-11$ $-y=-10.845$
$+x=+12$ $+y=+11.856$ $-x=-12$ $-y=-11.856$

Pour construire le lieu géométrique de cette courbe (fig. 11), après avoir tracé les angles des co-ordonnées, on prendra la suite des ordonnées positives parallèles à HI, première ordonnée, pour former la branche positive, et la suite des ordonnées négatives parallèles à *hi*, pour la branche négative.

L'équation de la courbe dont nous venons de tracer la suite des co-ordonnées, est extraite de l'*Introduction à l'Analyse des courbes par M. Cramer*, pag. 19. Quoique l'équation soit du quatrième degré, nous avons suivi les mêmes principes que dans les opérations précédentes. Les suites que l'on a obtenues sont sans imaginaires, sans interruption. A chaque abscisse répond une seule ordonnée et non quatre, comme dans M. Cramer. La loi de l'équation est observée dans toute la suite sans aucune lacune, ce qui ne se rencontre pas

dans les suites d'ordonnées de l'auteur, où la septième, tant positive que négative, la dixième et onzième négatives manquant totalement, laissent des vuides et des lacunes ridicules, tant dans la série que dans la figure de la courbe, comme on peut le voir dans la suite des coordonnées ci-après, et dans la figure 12 de M. Cramer.

A	B	C	D
$x=0$	$y=9.798-$	$x=0$	$y=0$
$x=1$	$y=9.744+$	$x=1$	$y=1.021+$
$x=2$	$y=9.582+$	$x=2$	$y=2.045-$
$x=3$	$y=9.302+$	$x=3$	$y=3.076+$
$x=4$	$y=8.887+$	$x=4$	$y=4.125+$
$x=5$	$y=8.289+$	$x=5$	$y=5.224-$
$x=6$	$y=6.928+$	$x=6$	$y=6.928+$
$x=7$	y imaginaire	$x=7$	y imaginaire
$x=8$	$y=6.928+$	$x=8$	$y=6.928+$
$x=9$	$y=8.698+$	$x=9$	$y=4.510+$
$x=10$	$y=9.798+$	$x=10$	$y=0$
$x=11$	$y=10.845+$	$x=11$	y imaginaire
$x=12$	$y=11.856+$	$x=12$	y imaginaire.
Selon M. Cramer.		Selon M. Cramer.	

Pour l'intelligence des suites d'ordonnées ci-dessus, nous transcrirons l'explication que M. Cramer en donne lui-même.

« Soit proposé, dit-il, l'équation $y^4 - 96yy$ « $-x^4+100xx=0$, qui résolue par la mé- « thode ordinaire pour les équations du second « degré, se trouve avoir ces quatre racines :

« $y=\sqrt{[48+\sqrt{(x^4-100xx+2304)}]}$

« $y=\sqrt{[48+\sqrt{(x^4-100xx+2304)}]}$

« $y=-\sqrt{[48+\sqrt{(x^4-100xx+2304)}]}$

« $y=-\sqrt{[48-\sqrt{(x^4-100xx+2304)}]}$

« où l'on voit qu'en général à chaque abscisse « x répondent quatre ordonnées y, hors les « cas, ou quelques unes, ou bien les quatre « deviennent imaginaires. »

R. Nous avons donné des preuves démonstratives que toute équation-puissance du second degré n'avoit et ne pouvoit avoir qu'une seule racine; à plus forte raison n'en pourra-t-elle pas avoir quatre, comme l'expose M. Cramer, en disant que l'équation proposée résolue par la méthode ordinaire pour les équations du second degré, se trouve avoir quatre racines. Quand il ajoute qu'à chaque abscisse x répon-

dent quatre ordonnées y, hors les cas, ou quelques unes, ou bien les quatre deviennent imaginaires, l'exception est tout-à-fait superflue, puisqu'une équation quelconque ne pouvant avoir qu'une racine, toutes les autres deviennent de la nature des imaginaires, c'est-à-dire, impossibles et chimériques.

On ne comprend guère mieux comment, sur l'extrémité de chaque abscisse, peuvent répondre quatre ordonnées, étant impossible, selon les premiers élémens de la géométrie, de pouvoir élever plus d'une perpendiculaire sur un point donné d'une ligne : or, les ordonnées, à un point de l'axe, sont-ils autre chose que des perpendiculaires quand l'axe ne fait pas la fonction de diamètre ? Une courbe peut couper une perpendiculaire en plusieurs points, mais on ne dira pas pour cela, qu'il y a autant de perpendiculaires que de sections. De plus, le nombre de ces ordonnées étant fondé sur le nombre des racines de l'équation, et l'équation n'ayant qu'une racine, il ne peut y répondre qu'une seule ordonnée. Continuons l'explication de M. Cramer concernant la figure 12.

« Voyons d'abord quelle branche fournit la pre-
« mière racine $y=\sqrt{[48+\sqrt{(x^4-100xx+2304)}]}$.
« Cette racine sera réelle tant qu'on donnera à
« x une valeur qui rende $x^4-100xx+2304$ po-
« sitive. Car cette grandeur étant positive, sa
« racine carrée précédée du signe + est réelle et
« positive, laquelle avec quarante-huit fait une
« somme positive, dont la racine carrée $\sqrt{[48+}$
« $\sqrt{(x^4-100xx+2304)]}$ est réelle. Si au con-
« traire, on donne à x une grandeur qui rende
« $x^4-100xx+2304$ négative, la racine carrée
« de cette grandeur négative est imaginaire ; et
« y, dont l'expression $\sqrt{[48+\sqrt{(x^4-100xx+}}$
« $2304)]$ renferme cette racine carrée, est ima-
« ginaire. L'existence ou non existence des
« branches représentées par cette racine, dépend
« donc de ce que la grandeur $x^4-100xx+2304$
« est positive ou négative. Pour déterminer ce
« qu'elle est, on cherchera les racines $xx-36$
« $=0$, et $xx-64=0$ de l'équation $x^4-100xx$
« $+2304=0$, afin de réduire cette grandeur en
« ses deux facteurs $(xx-36)\times(xx-64)$. On ré-
« duira de même $xx-36$ en ses deux facteurs
« $(x-6).\times(+6)$ et $xx-64$ en ses deux facteurs

« $(x-8)\times(x+8)$. Ainsi la grandeur $x^4-100xx$
« $+2304$ est réduite en ses quatre facteurs $(x+6)$
« $\times$ $(x-6)\times(x+8)\times(x-8)$. Elle sera donc
« positive si ses quatre facteurs sont positifs, ou
« s'il y en a deux seulement ; mais elle sera né-
« gative, si un seul de ses facteurs ou trois sont
« positifs. Comme on suppose x positive, les
« deux facteurs $x+6$ et $x+8$ sont essentielle-
« ment positifs : donc $x^4-100xx+2304$ est
« une grandeur positive quand $x-6$ et $x-8$
« sont tous deux positifs ou tous deux négatifs.
« Elle est négative quand x, tombant entre 6 et 8,
« rend $x-6$ positif et $x-8$ négatif.

« La racine $y=\sqrt{[48+\sqrt{(x^4-100xx+}$
« $2304)]}$ donne donc deux branches séparées
« par l'intervalle qui tombe entre les abscisses
« $x=6$ et $x=8$; examinons ces deux branches
« l'une après l'autre.

« D'abord, si $x=0$ on aura $y=\sqrt{(48+\sqrt{}}$
« $2304)=\sqrt{96}$. C'est la grandeur de la pre-
« mière ordonnée de cette branche. Ensuite
« x prenant $-100xx$, retranche plus de 2304
« que x^4 ne lui ajoute : ensorte que l'ordonnée
« va en décroissant à mesure que l'abscisse aug-

« mente, jusqu'à ce que $x=6$, faisant x^4-100 « $xx+2304$ égal à zéro, réduise y à $\sqrt{48}$. La « première branche CB va donc en s'approchant « de la ligne des abscisses, dès le point C, extré- « mité de la première ordonnée AC $=\sqrt{96}$, jus- « qu'au point B, extrémité de l'ordonnée PB $=$ « $\sqrt{48}$ qui répond à l'abscisse AP $=6$.

« L'autre branche, que désigne la même ra- « cine $y=\sqrt{[48+\sqrt{(x^4-100xx=2304)}]}$, com- « mence à l'abscisse $x=8=$AQ. Cette valeur « de x rendant $x^4-100xx+2304$ égal à zéro, « donne $y=$QD $=\sqrt{48}$. Dès lors, x croissant, « augmente la grandeur $x^4-100xx+2304$, et « par conséquent, l'ordonnée y $[+\sqrt{(48+\sqrt{(x^4}$ « $-100xx+2304)}]$. Cette racine marque donc « une branche DE, qui part du point D et va en « s'éloignant à l'infini de l'axe des abscisses et de « celui des ordonnées.

« Voyons à présent quelles branches donnent « la seconde racine $y=\sqrt{[48-\sqrt{(x^4-100}$ « $xx+2304)]}$. On voit d'abord que cette racine « est imaginaire comme la précédente, tant que « $\sqrt{(x^4-100xx+2304)}$ est imaginaire, c'est-à- « dire, dans tout l'intervalle compris entre les

« abscisses $x=6$ et $x=8$, où la courbe n'a ni « ordonnée ni branche. »

Nous ne prolongerons pas davantage cette exposition prolixe et énigmatique de l'auteur de l'Analyse des courbes; c'est au lecteur à en apprécier la valeur. Nous observerons seulement que la 7e ordonnée positive de la courbe, les 7, 11 et 12e négatives, sont des ordonnées imaginaires que M. Cramer propose à l'attention du lecteur de la manière suivante, pag. 18.

« Ces ordonnées méritent encore plus d'être « considérées, quand l'équation les donne « imaginaires ; quand elle les détermine à « cesser d'être possibles, alors la courbe manque « dans toute l'étendue, ou les ordonnées sont « imaginaires. Elles manquent tout-à-fait, ou « pour mieux dire, l'équation ne représente « aucune courbe, lorsque ses racines sont toutes « imaginaires; telle est l'équation $yy+xx+rr$ « $=0$, dont les racines $y=-\sqrt{(-xx-rr)}=0$, « et $y+\sqrt{(-xx-rr)}=0$, sont essentiellement « imaginaires, quelque valeur qu'on donne à x. »

R. L'équation $yy+xx+rr=0$, proposée par M. Cramer, dont le second membre est zéro,

doit nécessairement renfermer dans le premier membre autant d'unités négatives que de positives, lesquelles se détruisant mutuellement et totalement, rendent le second membre = o ; car il est impossible que trois quantités positives puissent égaler zéro : ce ne seroit plus une équation que l'on proposeroit. Cela étant, il faut de toute nécessité, que l'un des trois termes, ou deux, soient négatifs et égaux en nombre d'unités, au terme positif. Supposons seulement le terme yy négatif; on formera l'équation dans l'ordre négatif, en écrivant $-yy = -xx - rr$, dont on extraira la racine de part et d'autre, ce qui donnera $-y = \sqrt{-xx-rr}$ pour la racine de l'équation, laquelle bien loin d'être impossible est une des plus simples et des plus faciles à résoudre, et de laquelle on peut extraire une suite d'ordonnées propre à représenter une courbe double, l'une dans l'ordre négatif, la seconde dans l'ordre positif. Pour cet effet, nous ferons $-r = -1$, et $-x$ égal à la suite des nombres $-1, -2, -3$, etc. ce qui donnera deux séries de co-ordonnées, comme il suit.

C	D	A	B
$-x=0$	$-y=\sqrt{-1}$	$+x=0$	$+y=+\sqrt{1}$
$-x=-1$	$-y=\sqrt{-2}$	$+x=+1$	$+y=+\sqrt{2}$
$-x=-2$	$-y=\sqrt{-5}$	$+x=+2$	$+y=+\sqrt{5}$
$-x=-3$	$-y=\sqrt{-10}$	$+x=+3$	$+y=+\sqrt{10}$
$-x=-4$	$-y=\sqrt{-17}$	$+x=+4$	$+y=+\sqrt{17}$
$-x=-5$	$-y=\sqrt{-26}$	$+x=+5$	$+y=+\sqrt{26}$
$-x=-6$	$-y=\sqrt{-37}$	$+x=+6$	$+y=+\sqrt{37}$
$-x=-7$	$-y=\sqrt{-50}$	$+x=+7$	$+y=+\sqrt{50}$

Les deux premières colonnes sont dans l'ordre négatif, parce qu'elles procèdent d'une équation du même ordre négatif; mais les deux dernières sont dans l'ordre positif par voie d'opposition. L'ordonnée $-y=\sqrt{-1}$ de la colonne D qui répond à l'abscisse $-x=0$, est la racine du carré de la constante $-r=-1$ qu'a donnée l'équation $-y=\sqrt{0-rr}$. C'est pourquoi, pour construire le lieu géométrique relatif au lieu algébrique proposé, on procédera comme on a fait pour la construction du lieu du problême 6, où la constante étoit $\frac{1}{6}$.

La loi qui règne dans l'une et l'autre suite est, que chaque ordonnée est égale à la racine

du carré de son abscisse correspondante plus ou moins l'unité. Le *moins* est pour l'ordre négatif, et le *plus* pour l'ordre positif. Prenons, par exemple, dans la colonne D l'ordonnée $-y = \sqrt{-2}$. Le carré de l'abscisse -1 est -1; à quoi ajoutant -1, on a -2, dont l'expression de la racine est $\sqrt{-2}$. Si on prend l'ordonnée $-y = \sqrt{-5}$ correspondante à l'abscisse -2, on aura -4 pour le carré de l'abscisse, auquel ajoutant -1, il vient -5, dont la racine est $\sqrt{-5}$. Dans l'ordre positif, si on prend l'ordonnée $+y = +17$, qui correspond à l'abscisse $+4$, on aura $+16$ pour le carré de l'abscisse, auquel ajoutant $+1$, on a $+17$, dont la racine est $\sqrt{+17}$. On a peine à comprendre après cela comment M. Cramer peut proposer l'équation $yy + xx + rr = 0$, comme une équation insoluble, tandis qu'elle est très facile à résoudre. Quel cas peut-on faire à présent du Traité de l'Analyse des courbes, fondé sur des principes si défectueux? Aussi ne peut-on ouvrir ce livre volumineux, sans que l'œil ne soit choqué, presqu'à chaque page, de la figure singulière et bizarre des branches de courbes qu'il renferme.

PROBLÊME IX.

Déterminer le lieu géométrique de la courbe, exprimé par l'équation $y^2 = \frac{bx^2+x^3}{a-x}$.

RÉSOLUTION.

On extraira la racine de chaque membre de l'équation, ce qui donnera $y = \sqrt{\frac{bx^2+x^3}{a-x}}$, formule dont on extraira la suite des ordonnées pour la formation des branches de la courbe. Faisant $b=1$, $a=6$, on aura la suite des ordonnées de l'un et l'autre ordre, comme il suit.

A	B	C	D
$+x=0$	$+y=0$	$-x=0$	$-y=0$
$+x=+1$	$+y=\sqrt{\frac{2}{5}}$	$-x=-1$	$-y=\sqrt{-\frac{2}{5}}$
$+x=+2$	$+y=\sqrt{\frac{12}{4}}$	$-x=-2$	$-y=\sqrt{-\frac{12}{4}}$
$+x=+3$	$+y=\sqrt{\frac{36}{3}}$	$-x=-3$	$-y=\sqrt{-\frac{36}{3}}$
$+x=+4$	$+y=\sqrt{\frac{80}{2}}$	$-x=-4$	$-y=\sqrt{-\frac{80}{2}}$
$+x=+5$	$+y=\sqrt{\frac{150}{1}}$	$-x=-5$	$-y=\sqrt{-\frac{150}{1}}$
$+x=+6$	$+y=\sqrt{\frac{252}{0}}$	$-x=-6$	$-y=\sqrt{-\frac{252}{0}}$

Pour construire le lieu géométrique de cette courbe (fig. 13), on tirera les lignes ED, FG

se coupant en angle droit au point M, origine des abscisses, pour former les angles des ordonnées; celles qui répondent à la branche positive se prendront dans l'angle DMF, telle que l'ordonnée HI; celles qui répondent à la branche négative, se prendront dans l'angle EMG qui lui est diamétralement opposé, telle que l'ordonnée *hi.* C'est ainsi qu'il faut toujours concevoir l'opposition des ordonnées, ensorte que la suite des ordonnées positives de la colonne B ci-dessus, formera la branche positive MIP; et la suite des ordonnées négatives de la colonne D, formera la branche négative *mip*, comme on le voit dans la fig. 13, lesquelles branches étant doublées, donneront deux courbes entières parfaitement semblables, l'une dans l'ordre positif, la seconde dans l'ordre négatif.

On trouve dans les Leçons élémentaires de mathématiques de l'abbé de la Caille, augmentées par l'abbé Marie, la même équation $y = \sqrt{\frac{bx^2+x^3}{a-x}}$ pour la formation d'une courbe, dont voici l'explication.

« Cherchons, dit-il, la figure de la courbe

« exprimée par l'équation $y^2 = \frac{bx^2+x^3}{a-x}$. Je « prends BD (fig. 14) pour la ligne des abs- « cisses, AD $= a$ pour la direction des posi- « tives, le point A pour leur origine, EF pour « l'axe des ordonnées, et j'ai $y = \pm x\sqrt{\frac{b+x}{a-x}}$. »

R. Nous observerons que le double signe $\pm$ qui précède la valeur radicale est une erreur résultante d'une fausse supposition et d'un faux principe; à savoir, que d'une seule et même puissance on peut extraire deux racines insociables, lesquelles ne peuvent exister conjointement sans se détruire; mais quand même elles ne se détruiroient pas et seroient de même espèce, il seroit toujours impossible d'extraire deux racines d'un carré : aussi dit-on généralement extraire la racine carrée, et non pas les racines carrées, lorsqu'il n'y a qu'une seule puissance. En effet, former une seconde puissance, c'est répéter une quantité autant de fois qu'elle a d'unités; résoudre une seconde puissance, c'est revenir de la puissance à la quantité primitive, laquelle étant une, ne peut donner qu'une seule racine.

« Ce qui donne, 1°. $y=o$. La courbe doit « donc passer au point A. 2°. Pour chaque « valeur d'x je trouve deux valeurs d'y. »

R. Le premier cas est exactement vrai. Le second est faux, parce qu'il est une conséquence du faux principe *moins par moins donne plus.*

« Je prends x positive, mais moindre que a « ou AD, et j'ai pour y deux valeurs, PM, PM'. »

R. L'auteur, bien loin d'avoir pour y deux valeurs, n'a rien du tout, puisque la seconde y détruisant la première, le résultat est $+y-y=o$.

« Qui croissant de plus en plus, jusqu'à ce « qu'ayant pris $x=a$, elles deviennent infinies; « car alors j'ai $y=\pm x\sqrt{\frac{b+x}{o}}$. Supposant « donc, comme on le fait ordinairement, que « zéro exprime une quantité infiniment petite, « ou que $o=\frac{1}{\infty}$, y est infinie. »

R. On ne peut supposer zéro égal à une quantité infiniment petite, sans supposer zéro égal à une quantité. Or, cette dernière supposition ne peut se faire dans le cas présent, parce que zéro résultant de $+a-a$, qui représente une extinction entière de quantité, ne peut être pris pour une quantité infiniment

petite, $-a$ absorbant $+a$ dans sa totalité; d'où il faut conclure que $o = \frac{1}{\infty}$ est une équation fausse, non seulement en ce que zéro est un rien absolu, mais encore parce que $\frac{1}{\infty}$ n'exprime pas une quantité infiniment petite, si la quantité négative $-a$ au dessous de zéro est l'expression d'une quantité plus petite. Or, selon tous les algébristes qui admettent des logarithmes négatifs, les quantités négatives sont autant au dessous de zéro, que les quantités positives correspondantes sont au dessus: $\frac{1}{\infty}$ n'est donc pas l'expression d'une quantité infiniment petite, ni $\frac{b+x}{o}$ celle d'un infiniment grand, n'y ayant aucun rapport entre le rien et le réel.

« Si $x = a$, y devient imaginaire, la courbe « ne peut donc passer au-delà de GH. »

R. Si la courbe ne peut passer au-delà de GH, c'est parce que le point D est la limite des abscisses, conséquemment des ordonnées; et non par la raison que y devient imaginaire, puisque les imaginaires étant des impossibles, ne peuvent être cause d'un effet quelconque.

« Si x est négative, y a deux valeurs, pourvu

« que x soit moindre que b : la courbe a donc « aussi deux branches dans le sens négatif. »

R. Quand les x sont négatives, les branches doivent seulement changer de position, nullement de figure. Les branches négatives suivront donc le cours représenté dans la (fig. 13), et non celui de la (fig. 14) qui forme un nœud, parce que les nœuds et les points multiples sont des conséquences de faux principes. Toute branche positive devient négative par la seule contre-position, sans varier sa figure.

« Si $x = b$, $y = 0$: la courbe doit donc passer « au point B, mais elle ne peut descendre plus « bas, puisque x plus grand que b, rend les y « imaginaires. »

R. La raison qui a empêché la branche positive d'outre-passer le point D, empêche la branche négative d'outre-passer le point B, puisque l'un et l'autre points sont les limites, tant des abscisses que des ordonnées de la courbe, et non les imaginaires, qui cesseroient de l'être, si elles pouvoient produire des effets.

« Faisant $y = 0$ dans la supposition de x né-

« gative et $=b$, on a $y^2=xx\left(\frac{b-x}{a+x}\right)=0$; d'où « l'on tire $x^2(b-x)=0$, qui donne $x=0$, « $x=0$, $x=-b$. La courbe passera donc une « fois au point B et deux fois au point A, où « elle formera un nœud. »

R. Dans la supposition de x négative et de $y=0$, on ne doit pas avoir $x^2(b-x)=0$, mais $-x^2(b-x)=0$, parce qu'un carré doit toujours être de l'espèce algébrique de sa racine. Si en répétant quatre fois quatre écus on a nécessairement seize écus, on ne concevra jamais pourquoi en répétant quatre fois quatre unités négatives, on auroit seize unités positives. C'est donc une erreur de donner xx pour le carré de $-x$, qui est nécessairement $-xx$. On ne comprendra pas mieux comment une racine peut être deux fois rien et une fois moins que rien; c'est cependant ce que signifie $x=0$, $x=0$, $x=-b$. La postérité ne croira jamais qu'un tel langage ait pu être celui de la véritable algèbre.

RÉCAPITULATION

des Erreurs observées et réparées dans cet ouvrage, concernant les règles usitées du calcul algébrique.

Erreurs dans l'Addition. C'est une erreur d'ajouter des unités hétérogènes pour en composer une somme; par exemple, 15 toises avec 10 écus. C'est donc une erreur encore plus grande, comme on le pratique en algèbre, d'ajouter 15 unités positives avec 10 unités négatives, pour ne recueillir que 5 unités positives, somme plus foible en nombre d'unités que l'une des parties proposée à ajouter. Il est visible en pareil cas que le mélange des unités positives et négatives donne une différence: or, une différence n'est pas somme et ne peut appartenir à l'addition. Donner des différences et des résultats de soustraction pour exemples d'addition, comme on le fait dans tous les livres d'algèbre, c'est induire en erreur ceux que l'on prétend instruire. Pour éviter un pareil inconvénient, on n'a donné pour exemples d'ad-

dition que des unités homogènes à ajouter, unités positives à unités positives, unités négatives à unités négatives.

Erreurs dans la Soustraction. De 15 unités en ôter 10 et en avoir 25 de reste, est une opération que la raison dicte ne pouvoir appartenir à la soustraction. Cependant tous les algébristes affirment le contraire. S'ils veulent soustraire 10 unités négatives de 15 unités positives, ils changent le signe — des unités négatives en signe +, ce qui leur donne +10; à quoi réunissant +15, ils trouvent +25 pour restant, et croient réellement n'avoir fait qu'une soustraction, ce qui leur fait dire, que soustraire n'est pas toujours *diminuer*.

C'est se tromper que penser ainsi. Le changement de signe appartient incontestablement à la soustraction; mais cette opération n'est que préliminaire, pour rendre homogènes des unités qui ne l'étoient pas, et par là les rendre susceptibles d'addition. La soustraction s'arrête là et ne va pas plus loin. L'opération subséquente qui réunit en une somme les unités ren-

dues homogènes, appartient entièrement à l'addition qui est l'opération finale. La somme que l'on obtient n'est donc pas un résidu de soustraction, mais une véritable somme composée de parties homogènes réunies. Cet exposé fait disparoître tous les mauvais raisonnemens accumulés, pour rendre raison de la singularité du fait, dont voici l'opération.

On propose de trouver la différence qui existe entre 15 unités de l'ordre positif et 10 unités de l'ordre négatif, quantités évidemment hétérogènes. Pour les rappeler au même ordre, on fait précéder du signe — d'opération le signe — de quantité de la valeur comparée, ce qui donne $+15 - -10$. Par cette opération, qui appartient à la soustraction, on obtient deux nombres de même ordre et de même espèce susceptibles de toutes les opérations de calcul. Si donc on veut les ajouter, on aura $+15+10$ -25, résultat qui appartient à l'addition, comme opération finale, et à la soustraction, comme opération préliminaire.

Erreurs dans la Multiplication. Il n'y a

point de mauvais raisonnemens qui n'aient été faits en algèbre, pour prouver l'existence de ce principe déraisonnable, *moins par moins donne plus.* Nous commencerons l'énumération de ces preuves par la démonstration de l'auteur de la Science du Calcul, comme ayant plus de droit à la moins mauvaise; la voici, le lecteur en jugera.

« L'unité positive +1 peut être, pour ainsi « dire, par retranchement dans la multiplica- « tion, et elle en est toujours retranchée, quand « le multiplicateur —3 est négatif; donc si le « multiplié —4 est aussi négatif, il doit être « autant retranché du produit, que l'unité +1 « est retranchée du multiplicateur —3 : or, « pour retrancher une grandeur qui a le signe « —, il faut l'écrire avec le signe +; donc « pour retrancher —4 trois fois, il faut écrire « +12. »

La démonstration de l'auteur, qui change visiblement la multiplication en soustraction, consiste dans cette proportion anti-géométrique, +1:—3::—4:+12, dans laquelle les termes des rapports étant composés d'unités hétéro-

gènes, rendent le produit des extrêmes, qui est +12, diamétralement opposé à celui des moyens, qui est —12.

D'autres ont dit qu'un multiplicande négatif étoit un défaut, et que pour réparer ce défaut, il falloit donner au produit le signe +, sans faire attention qu'en donnant au produit le signe +, le produit étoit d'une espèce opposée à son multiplicande, dont il n'est cependant que la répétition.

D'autres ont avancé que multiplier par *moins*, c'étoit répéter le multiplicande dans le sens du multiplicateur, c'est-à-dire négativement; mais quel sens donner à une répétition négative, si ce n'est qu'il ne faut pas répéter?

D'autres ont écrit que multiplier par *moins* étoit la même chose que soustraire; tandis que ce sont deux choses opposées. Multiplier, signifie augmenter en nombre d'unités, et soustraire, dit positivement diminuer en nombre d'unités; ce qui signifieroit augmenter en diminuant.

D'autres ont pensé qu'il falloit avoir égard à l'espèce des unités du multiplicateur, dont la

propriété étoit de changer l'espèce des unités du multiplicande, sans considérer que si on avoit égard à l'espèce des unités du multiplicateur, le multiplicateur cesseroit d'être un nombre abstrait, en quoi consiste son essence, un nombre abstrait étant celui dont on ne compte que le nombre de ses unités, sans égard quelconque à leur espèce. Quand on multiplie trois toises par quatre écus, on ne fait attention qu'au nombre quatre, sans égard quelconque à l'espèce des écus, dont on fait abstraction, autrement les écus entreroient dans le produit qui donneroit des toises écus, ce qui est absurde.

D'autres ont fait ce raisonnement, $-a$ par $-b$ ne peut donner $-ab$, puisque $-a$ par $+b$ donne déjà $-ab$; il faut donc qu'il donne $+ab$. Argument facile à rétorquer, en disant $-a$ par $-b$ ne peut donner $+ab$, puisque $+a$ par $+b$ donne déjà $+ab$: donc $-a$ par $-b$ doit donner $-ab$ et non $+ab$.

De toutes les preuves que l'on a données de ce prétendu principe *moins par moins donne plus*, la plus apparente et la moins déraisonnable est la suivante. Soit proposé de former

le produit de $7-3$ par $5-2$: On sait qu'il doit donner $+12$, puisqu'il est le même que celui de 4 par 3. Or, quand on en est au produit partiel des deux quantités négatives -3 et -2, il faut, de toute nécessité, que ce produit partiel donne $+6$, pour que le produit total donne $+12$: donc $-$ par $-$ doit donner $+$.

R. Lorsqu'on en est au produit partiel des deux quantités négatives -3 et -2, il faut dire -3 par $+2$, multiplicateur positif, donne -6 excès de soustraction, que l'on répare en plaçant le signe $-$ d'opération avant le signe de quantité, en cette sorte, $--6$, qui fait le même effet que $+6$, comme on le voit dans l'opération suivante :

$7-3$
$5-2$

$35-15$
$-14--6$

$35-29+6=35-23=+12$, produit de $7-3$ par $5-2$.

Cet exposé fait disparoître la preuve la plus apparente de l'existence de ce faux principe, *moins par moins donne plus*, parce que le

double signe — — qui exprime la soustraction d'une quantité négative, donne la même valeur et le même résultat que l'addition d'une positive, ensorte que — — = +6.

Erreurs dans la Division. La division n'étant qu'une soustraction abrégée, diviser une quantité par une autre, c'est soustraire la seconde de la première autant de fois qu'elle y est contenue. Il faut donc, de toute nécessité, que cette seconde quantité, qui s'appelle diviseur, soit contenue dans la première, qui s'appelle dividende, afin de pouvoir l'en soustraire; mais pour cela, il faut que le diviseur soit de même espèce algébrique que le dividende, autrement l'algèbre, bien loin d'accorder le nombre de fois qu'il y est contenu, donneroit le nombre de fois qu'il en est exclu, c'est-à-dire, un quotient infini, comme il est facile de le prouver.

Soit proposé de diviser + 12 par — 4, quantités de différentes espèces algébriques, le dividende étant positif et le diviseur négatif. Comme la division n'est qu'une soustraction abrégée, si l'on ne veut point abréger la sous-

traction, il faudra, pour avoir le quotient, faire la somme du nombre de fois que l'on soustraira le diviseur du dividende, pour savoir combien de fois il y est contenu. Si donc on soustrait le diviseur — 4 du dividende + 12, on aura + 12 — — 4 ou + 16 pour résidu, et 1 pour quotient. Si du résidu 16 on retranche — 4, on aura + 20 pour résidu, et 1 pour quotient. Si du résidu 20 on ôte — 4, on aura 20 — — 4 ou 24 pour résidu, et 1 pour quotient. Voyez l'opération ci-après.

Dividende.	Diviseur.	Résidu.	Quotient.	
+ 12	— — 4	+ 16	+ 1	
+ 16	— — 4	+ 20	+ 1	
+ 20	— — 4	+ 24	+ 1	= ∞
+ 24	— — 4	+ 28	+ 1	
+ 28	— — 4	+ 32	+ 1	

Il est visible dans cette opération, que le dividende augmentant continuellement au lieu de diminuer, le nombre des soustractions seroit infini; et parce que les unités du quotient expriment ce nombre, il s'ensuit que le quotient seroit infini. On ne conçoit pas comment les

algébristes ont pu dire + dans — et — dans +, et écrire $\frac{-}{+}$ et $\frac{+}{-}$, ce qui est une absurdité, comme on vient de le prouver.

Erreurs dans les Puissances. Pour former une seconde puissance ou un carré, les algébristes donnent pour règle de multiplier la quantité elle-même par elle-même. Règle fausse, source d'erreurs d'où découlent les imaginaires, pour avoir exigé que le multiplicateur fût toujours de même espèce algébrique que le multiplicande; et comme la chose est impossible, il ne faut pas être étonné si les imaginaires, qui tirent leur origine de cette impossibilité, sont des êtres chimériques et impossibles.

Le multiplicateur est un nombre abstrait, parce que l'on fait abstraction de l'espèce de ses unités, dont on ne considère que le nombre; par exemple, on demande la seconde puissance de +6? On multiplie +6 par 6; l'on obtient +36 pour la seconde puissance de +6. On demande la seconde puissance de —6? On multiplie —6 par le même multiplicateur 6; et l'on a —36 pour la seconde puissance de —6;

par où l'on voit que dans l'ordre négatif, bien loin de multiplier la quantité elle-même par elle-même, pour en obtenir le carré ou la seconde puissance, il faut la multiplier au contraire par une quantité positive opposée à elle-même. Telles sont les règles de la véritable algèbre, du bon sens et du raisonnement, qui ne produisent point d'imaginaires, et donnent toujours des puissances de même espèce que celle de leur racine. En effet, former la seconde puissance de -6, c'est écrire six fois -6 : or, six fois -6 donnent -36, puissance de même ordre et de même espèce que sa racine -6.

Erreurs dans l'Extraction des racines. La racine d'une puissance est la quantité positive ou négative dont les répétitions ont formé la puissance. La racine de $+aa$ est $+a$, qui a été répétée a fois. La racine de $-aa$ est $-a$, qui a été répétée le même nombre de fois, c'est-à-dire, a fois. C'est donc une erreur que de vouloir extraire de la puissance positive $+aa$, la racine $-a$, qui n'a concouru en rien à sa formation, qui n'y est point contenue, et

qui détruiroit la racine positive $+a$, si elle étoit renfermée dans $+aa$. On voit par là la fausseté de la formule des équations du second degré $\pm\sqrt{aa}$, qui suppose un alliage impossible, c'est-à-dire, une racine négative existant simultanément dans la même puissance avec une racine positive.

Si c'est une erreur d'extraire $+a$ et $-a$ de la même puissance positive $+aa$, c'est une autre erreur de dire que la racine de $-aa$ est une racine impossible, puisque $-a$ répété $+a$ fois ayant donné la puissance $-aa$, on doit, en revenant de la puissance à la racine, obtenir $-a$ de l'ordre négatif, comme on obtient de la puissance $+aa$ la racine $+a$, de même ordre qu'elle.

Erreurs dans les Exposans. Les exposans sont des petits chiffres placés à droite et un peu au dessus de la lettre dont ils déterminent la puissance. Ainsi dans $+a^4$ le petit chiffre 4 exprime la quatrième puissance de a. Ce petit chiffre est un signe d'abréviation qui indique le nombre de lettres qu'il faudroit accoler pour composer la puissance sans abréviation; d'où

il suit que $+a^4$ dit la même chose que $+aaaa$ dans l'ordre positif, et $-a^4$ dit la même chose que $-aaaa$ dans l'ordre négatif. Le nombre des lettres qui composent une puissance, soit positive, soit négative, étant toujours positif, le petit chiffre exposant qui exprime ce nombre ne peut être que positif. C'est donc une erreur de le faire négatif, et écrire a^{-4} au lieu de $-a^4$. Quand il est question de donner la définition d'un exposant négatif, tous les auteurs, en place de la définition qu'ils ne peuvent trouver, disent que a^{-4} répond à l'unité divisée par a^4, ensorte que l'on a l'expression $a^{-4} = \frac{1}{a^4}$; ce qui est faux, parce que c'est $-a^4$ qui donne $\frac{1}{a^4}$, comme nous l'avons prouvé démonstrativement.

Les algébristes disent que a^{-4} vient de $a^{3-7} = a^{-4}$; mais il est impossible que a^{3-7} puisse dire autre chose que $a^3 - a^7 = -a^4$, dont l'exposant est positif et non négatif. Il y a des quatrièmes puissances négatives; mais les moins quatrièmes puissances n'ont ni existence, ni possibilité. L'erreur des exposans négatifs vient d'avoir pris un signe de division pour un signe

de soustraction, et avoir fait $a^{m-m} = a^{o}$, au lieu de $\frac{a^m}{a^m} = 1$. On ne comprend pas comment on a pu donner a^{o} pour une expression de calcul, puisque zéro, en qualité d'exposant, faisant la fonction de multiplicateur, donneroit $a^{o} = o$, et non $a^{o} = 1$, comme on le prétend mal à propos. Nous avons fait voir que dans la somme $2+2+2+2-2$, le signe — du dernier chiffre étoit un signe de soustraction, et que dans le produit $2\times2\times2\times2-2$, le signe — qui précède le dernier chiffre étoit un signe de division, qui réduit l'expression-produit au quotient $\frac{16}{2} = 8$. La raison de ce procédé est toute simple : une quantité engagée dans une autre par voie de multiplication, n'en peut être détachée que par l'opération opposée, qui est la division. Pareillement une quantité engagée dans une autre par voie d'addition, n'en peut être détachée que par l'opération contraire, qui est la soustraction.

Erreurs dans les Logarithmes. Les logarithmes sont des nombres en progression arithmétique, correspondant terme à terme à d'autres nombres

en progression géométrique. L'auteur de la Science du Calcul donne la formule suivante, comme représentant le système ordinaire des logarithmes.

+5	+4	+3	+2	+1	0	−1	−2	−3	−4	−5
100000	10000	1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{100000}$

Quand on considère la progression géométrique de ce système, il n'y a rien de défectueux; tous les termes sont dans l'ordre positif, et le rapport est exactement le même dans toute la suite. Mais quand on considère la progression arithmétique, qui est celle des logarithmes, il s'en faut de beaucoup que l'on en puisse dire autant; c'est une suite amphibie, moitié positive, moitié négative, dont les termes subséquens détruisent et annullent les antécédens, ensorte que réduction faite de la valeur des termes de la progression, elle se trouve égale à zéro. Examinons à présent la différence de cette progression arithmétique.

Dans une progression arithmétique, la différence doit être la même entre deux termes consécutifs. Commençons par le terme positif +4, et voyons si la même différence régnera

entre les termes consécutifs. Si de +4 on ôte +3, on aura +1 pour différence. Si de +3 on ôte +2, on aura +1 pour différence. Si de +2 on ôte +1, terme consécutif, on aura +1. Si de +1 on ôte zéro, on aura encore +1 pour différence; mais à présent, comment de zéro, qui n'est pas une quantité, mais l'exclusion de toute quantité, conséquemment qui ne peut rien contenir, en extraira-t-on la différence positive +1? On voit par là que la progression arithmétique des logarithmes se termine à zéro, sans pouvoir le franchir; d'où il suit que les termes fractionnaires de la progression géométrique correspondante manquent totalement de logarithmes, et que les logarithmes positifs, qui correspondent aux nombres entiers de la progression géométrique, sont les seuls vrais logarithmes. C'est donc une erreur que d'admettre des logarithmes négatifs, d'autant plus que les logarithmes étant des exposans, et n'y ayant point d'exposant négatif, il ne peut y avoir de logarithmes négatifs.

Erreurs dans les Rapports. La condition la

plus essentielle, en fait de rapports, est l'homogénéité dans les termes de comparaison. On ne compare pas la couleur a avec l'odeur b, parce que les termes étant hétérogènes et d'espèce physique différente, ne peuvent avoir entre eux une mesure commune; par la même raison on ne peut comparer la positive $+a$, avec la négative $-b$, parce que les termes étant hétérogènes et d'espèce algébrique opposée jusqu'à se détruire, ne peuvent avoir une mesure commune, ni être contenus l'un dans l'autre. Cependant tous les livres d'algèbre disent le contraire, et prétendent que le positif est contenu dans le négatif, et le négatif dans le positif, ce qu'ils expriment de la manière suivante, $\frac{+}{-}$ et $\frac{-}{+}$ ou $\frac{+ab}{-a}$ et $\frac{-ab}{+a}$, et disent que le quotient est $-b$, établissant par là des quotiens négatifs qui répugnent à la nature de la chose, puisqu'un quotient est un nombre abstrait positif, de même espèce que le multiplicateur, avec lequel il ne diffère que de nom. En effet, le multiplicateur indique combien de fois il faut ajouter le multiplicande pour en former le produit, et le quotient indique combien de

fois il faut le soustraire pour épuiser le produit. Or, ce nombre de fois est égal de part et d'autre ; donc le quotient est un nombre de même espèce que le multiplicateur, c'est-à-dire, essentiellement positif. C'est donc une erreur d'admettre des quotiens négatifs qui donnent les faux rapports mentionnés ci-dessus. Les seuls vrais rapports algébriques sont les suivans, $\frac{+a}{+b}$, $\frac{-a}{-b}$ ou $+a:+b$ et $-a:-b$, et jamais $+a:-b$ ou $-a:+b$. On peut soustraire un quotient positif $+b$, ce qui donnera $-+b$, expression dans laquelle le signe — est signe d'opération ; mais jamais le signe — ne doit faire partie du quotient et être signe de quantité.

Erreurs dans les Proportions. On ne peut voir sans étonnement et sans une espèce de répugnance ces formules, $+a:-b::-b:+c$, ou $-2:+4::+4:-16$, lesquelles, sous le nom de proportions géométriques, donnent des anti-proportions qui sont la honte du raisonnement. N'est-ce pas pécher contre la raison d'avancer que le moins est au plus, comme le plus est au moins ? Est-il moins déraisonnable

de composer des proportions sans rapports? Or, quel rapport peut-il y avoir entre des quantités d'espèce opposée et qui se détruisent mutuellement, entre $+a$ et $-b$, $+4$ et -16? L'algèbre elle-même constate le ridicule des prétendues proportions qui en sont composées, en donnant le produit des extrêmes diamétralement opposé à celui des moyens, ensorte que de $-1:+4::+4:-16$, on extrait $-16=+16$. Les proportions étant la partie dominante du calcul répandue dans toutes les parties des mathématiques, on ne peut trop les purger de pareilles erreurs.

Une observation intéressante sur les proportions, est que toute proportion, soit dans l'ordre positif, soit dans l'ordre négatif, est composée de deux rapports, dont l'un est nécessairement positif, parce qu'il sert de multiplicateur au produit des extrêmes et au produit des moyens, ce que nous avons exprimé par la formule $+a:+b::\begin{cases}+c:+d\\-c:-d\end{cases}$; c'est pourquoi s'il se rencontroit que l'on eût dans l'ordre négatif $-m:-n::-p:-q$, il faudroit changer la proportion en $+m:+n::-p:-q$;

$+m$ seroit le multiplicateur des extrêmes, et $+n$ le multiplicateur des moyens.

Erreurs dans les Progressions. Les progressions sont des suites de proportions continues dont le même terme fait la fonction d'antécédent, relativement au terme qu'il précède, et de conséquent, relativement à celui dont il est précédé. Les progressions géométriques sont vraies, lorsque les conséquens des rapports sont homogènes et de même espèce algébrique que leurs antécédens, c'est-à-dire, positifs si positifs, négatifs si négatifs; telles sont les progressions $+1+2+4+8+16$, etc. ou $-1-2-4-8-16$, etc. Les progressions géométriques sont fausses, ou plutôt il n'y a point de progression, lorsque les conséquens des soi-disant rapports sont hétérogènes à leurs antécédens, c'est-à-dire négatifs, quand les antécédens sont positifs, et positifs quand les antécédens sont négatifs; telles sont les progressions $+1-2+4-8+16-32$, etc. dans lesquelles, si l'on prend trois termes consécutifs, le carré du terme moyen détruit entièrement le produit des ex-

trêmes. Par exemple, en prenant $-2+4-8$, le carré du terme moyen $+4$, qui est $+16$, détruit le produit des extrêmes, qui est -16. De pareilles progressions sont visiblement des chaînes d'erreurs.

Erreurs dans les séries. Les séries sont des suites de termes algébriques ou numériques, dont les valeurs vont en augmentant ou en diminuant, relativement à la loi qui les dirige. Les séries s'appellent *divergentes* lorsqu'elles vont en augmentant; elles prennent le nom de *convergentes* lorsqu'elles vont en diminuant. Les séries les plus ordinaires sont celles qui résultent des fractions réduites en des suites infinies.

L'auteur de l'Analyse déterminée, pag. 124, donne pour formule de pareilles suites, la suivante, $1+a+a^2+a^3+a^4+a^5$, etc. extraite de la fraction $\frac{1}{1-a}$, c'est-à-dire, de la division successive de l'unité par $-a$. La fausseté de cette formule se fait spécialement remarquer dans l'application que l'auteur en fait aux valeurs numériques. Quand il substitue l'unité en place

de a de la formule, il obtient la suite infinie d'unités simples, $1+1+1+1+1$, etc. qu'il prétend représenter un infiniment grand, parce que le dénominateur lui donne $1-1=0$, et que la fraction se change en $\frac{1}{0}$, qui est l'expression, dit-il, d'un infiniment grand, par la raison que zéro est l'expression d'un infiniment petit.

Nous observerons sur cela, 1°. que zéro dans le cas présent ne peut représenter un infiniment petit, lequel est censé être une quantité, et que $0=1-1$ est un zéro absolu, qui indique une extinction totale de quantité; et parce qu'il ne peut exister aucun rapport entre la quantité et la non-quantité ou le rien absolu, il s'ensuit que $\frac{1}{0}$ est une expression ridicule, qui indiqueroit que l'unité numérateur feroit partie du dénominateur zéro, c'est-à-dire de rien. Si la substitution de l'unité en place de a dans la formule donne de si étranges conséquences, la substitution de deux unités n'en donnera pas de moins surprenantes.

« Si l'on suppose $a=2$, dit le même auteur, « notre suite devient $=1+2+4+8+16+32$ « $+64$, etc. à l'infini, et sa valeur doit être $\frac{1}{1-2}$,

« c'est-à-dire $\frac{1}{-1} = -1$; ce qui, au premier coup-
« d'œil, semblera absurde. » L'absurdité, bien loin de n'être qu'apparente, est une des mieux caractérisées. En effet, à qui pourra-t-on persuader que la valeur d'une suite infinie, non seulement en nombre d'unités, mais encore en progression ascendante de dimensions, soit moindre que zéro? De plus, on ne comprend pas comment la substitution d'une seule unité dans la formule donne un infiniment grand, tandis que la substitution de deux unités donne moins qu'un infiniment petit. Le vice de ces fausses suites procède du faux rapport $\frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1}$, dont les termes, étant hétérogènes, ne peuvent rendre que des séries fausses et ridicules.

Le même auteur extrait encore de la fraction $\frac{1}{1+a}$ la formule suivante : « $1 - a + a^2 - a^3 + a^4$
« $- a^5$, etc. en disant que si l'on pose $a = 1$,
« on a cette comparaison remarquable, $\frac{1}{1+1}$
« $= \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$, etc. à
« l'infini. On y trouvera, ajoute-t-il, quelque
« chose de contradictoire, car si on s'arrête
« à $- 1$, la série donne zéro, et si on finit par
« $+ 1$, elle donne 1. Mais c'est là précisément

« ce qui tranche le nœud, car puisqu'on doit « continuer jusqu'à l'infini, sans s'arrêter jamais « ni à — 1, ni à + 1, il est clair que la somme « ne peut être ni zéro, ni un, et qu'il faut que « ce résultat final tienne un milieu entre ces « deux et qu'il soit $\frac{1}{2}$. »

R. Il n'y a personne qui ne sente la foiblesse et l'insuffisance d'un pareil raisonnement; aussi est-il faux que la somme de cette série alternative soit égale à $\frac{1}{2}$, parce que si les termes de la suite sont pairs, en quelque nombre qu'ils soient, la somme est toujours égale à zéro, et si les termes sont impairs, la somme est toujours égale au premier terme, les suivans, en nombre pair, étant $=$ o. L'erreur dans le raisonnement et la fausseté dans l'opération viennent d'avoir pensé que l'on pouvoit diviser + par — et — par +, et d'avoir effectué l'opération en conséquence de cette fausse supposition, ce qui a donné une suite de quotiens alternativement vrais et faux. Les quotiens vrais sont ceux qui sont extraits des formules $\frac{+}{+}$ et $\frac{-}{-}$. Les quotiens faux sont extraits des formules $\frac{-}{+}$ et $\frac{+}{-}$.

Erreurs dans les Équations. Ce seroit une erreur d'optique en regardant dans un verre à facettes, de prendre les images répétées du même objet, pour autant d'objets réels différens. C'est également une erreur dans les équations composées de prendre les répétitions d'une même racine pour autant de racines de valeurs différentes. Afin de donner à cette comparaison l'éclaircissement qu'elle exige, nous dirons qu'une équation composée n'est autre chose qu'un produit dans lequel il n'y a qu'un seul multiplicande, lequel prend le nom de *racine* dans une équation composée. Soient, par exemple, les équations simples, $x=3$, $y=4$; multipliant l'une par l'autre, on aura $x \cdot y = 3 \times 4 = 3+3+3+3$, équation composée de l'unique racine 3 répétée quatre fois. Si à ces deux équations on ajoute $z=2$, on aura pour produit des trois facteurs, $x \cdot yz = 3+3+3+3+3+3+3+3$, équation composée de l'unique racine 3 répétée huit fois. On voit par là qu'en augmentant le nombre des facteurs, on n'augmente pas, dans le même produit, le nombre des racines, mais seulement le nombre des répé-

titions d'une même racine. Si les répétitions d'une même racine n'en augmente pas le nombre, à plus forte raison les racines imaginaires nombres impossibles, n'en augmenteront-ils pas le nombre.

C'est donc une chose contraire à la raison de dire que l'équation $x^3 - 1 = 0$ a trois racines cubiques, tandis que l'algèbre n'en donne qu'une, qui est l'unité, les deux autres $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ qui sont imaginaires et tout-à-fait nulles, ne pouvant rien ajouter à l'unité de racine. De l'unité de racine dépend la vraie théorie des équations ; théorie simple et satisfaisante, conforme à la raison, qui dicte que toute somme, tout produit doit être composé d'unités homogènes ; et parce qu'aucun produit n'est composé d'unités de fois, il s'ensuit que tout facteur multiplicateur ne peut faire partie d'un produit, ni être racine d'une équation quelconque, en qualité de multiplicateur. Si l'on dit que dans un rectangle qui est un produit géométrique, la longueur et la largeur qui en sont les facteurs sont des lignes de même

nature, qui entrent l'une et l'autre dans la composition du rectangle, on répondra que cela n'est ni ne peut être ; car si l'on prend la longueur pour multiplicande, il ne faudra pas la considérer comme un élément de première dimension, mais comme un élément de surface, c'est-à-dire, comme un rectangle fort étroit, et la ligne de largeur, comme une échelle dont les divisions indiqueront le nombre de fois qu'un ou plusieurs de ces petits élémens pris pour multiplicande, doit être répété pour former le rectangle entier. La ligne de largeur sera donc composée d'unités de fois, unités d'une espèce bien différente de celles des unités qui composent les élémens de surface, considérés comme multiplicande du produit géométrique. Si on prend la ligne de largeur pour multiplicande, la ligne de longueur représentera le multiplicateur composé d'unités de fois.

C'est une autre erreur de faire dans la fabrique des équations composées, $x = 4$, $x = 5$, parce que lorsqu'une lettre a reçu sa détermination, elle ne peut plus la changer dans la même opération. Donc si x est déterminée

comme signe à représenter 4, il ne peut plus dans le même produit représenter 5; autrement on pourroit faire ce raisonnement très concluant, $4 = x$, $5 = x$: donc $4 = 5$. De plus, xx représente un carré, et 4×5 représente un rectangle; donc le signe et la chose signifiée seroient inconcordans et capables d'induire en erreur, si x avoit deux valeurs différentes.

C'est encore une autre erreur d'extraire d'une même puissance deux racines non seulement hétérogènes, mais insociables et destructives l'une de l'autre; cependant les algébristes donnent cet alliage impossible pour principe général de solution dans les équations du second degré, en écrivant $x = \pm\sqrt{49} = \pm 7$, au lieu d'écrire $+x = \sqrt{+49} = +7$, et $-x = \sqrt{-49} = -7$, ce qui place chaque racine dans son ordre respectif. M. Euler, dans sa formule des équations du second degré, $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$, à l'erreur du double signe, en ajoute une autre, qui est de rendre positif le carré de la quantité négative $-\frac{1}{2}p$, en écrivant $\frac{1}{4}pp$ au lieu de $-\frac{1}{4}pp$. C'est pourquoi l'expression corrigée de la formule doit être $+x = -\frac{1}{2}p - \sqrt{-\frac{1}{4}pp - q}$, qui

donnera la première formule des équations-produits, et $-x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{-\frac{1}{4}pp - q}$ pour la seconde.

C'est encore une autre erreur concernant les équations, de distinguer dans les quantités négatives des degrés pairs qui les rendent positives, et des degrés impairs qui les conservent négatives; comme si $-x$ répété x fois pouvoit donner autre chose que $-xx$, et $-x$ répété xx fois, autre chose que $-xxx$! quantités l'une et l'autre qui sont du même ordre négatif, avec cette différence que les unités de $-xx$ sont de deux dimensions, et que celles de $-xxx$ sont de trois, sans altération quelconque de leur ordre primitif.

Erreurs dans l'Application de l'algèbre à la géométrie. La géométrie, telle qu'on l'enseigne, n'étant autre chose qu'une algèbre figurée, doit nécessairement porter l'empreinte des erreurs d'algèbre que nous venons de caractériser; aussi se trouve-t-elle si défectueuse, qu'elle est impuissante à former un carré sur une ligne donnée. On propose, par exemple,

de construire un carré sur l'ordonnée négative d'une parabole supposée placée à gauche de l'axe; ce carré ne pouvant être ni négatif, ni positif, est un carré impossible. Il ne peut être négatif, puisque résultant de moins par moins il doit être positif; mais il ne peut être positif, n'étant pas à droite de l'axe, qui est le lieu des ordonnées et des carrés positifs. Il est donc impossible à une telle géométrie de construire un carré sur une ligne donnée.

Cette même géométrie, en faisant adhérer les ordonnées positives et négatives à un axe positif, réduit à rien la superficie des courbes à branches symétriques, parce qu'il s'ensuit de cette adhérence, que l'axe divisant la courbe et sa superficie en deux parties égales, dont l'une composée d'élémens ou d'ordonnées positives, et l'autre d'ordonnées négatives, la seconde détruit la première et la réduit à zéro : car faisant la somme des élémens positifs $= +s$, et celle des élémens négatifs $= -s$, on a pour résultat $+s-s=0$. Il en seroit de même du paramètre de la courbe composé de deux ordonnées, l'une positive, l'autre négative, qui donneroit $+y-y$

$=o$. Les imaginaires algébriques s'étendent aussi sur cette géométrie dont elles rongent les branches des courbes en faisant un dégât considérable. Voici la description qu'en fait M. Cramer.

« Ces ordonnées méritent encore plus d'être « considérées, quand l'équation les donne ima- « ginaires ; quand elle les détermine à cesser « d'être possibles, alors la courbe manque dans « toute l'étendue, ou les ordonnées sont ima- « ginaires. Elles manquent tout-à-fait; ou pour « mieux dire, l'équation ne représente aucune « courbe, lorsque ces racines sont toutes ima- « ginaires. Telle est l'équation $yy+xx+rr$ « $=o$, dont les racines $y=-\sqrt{(-rr-xx)}$ « $=o$ et $y=+\sqrt{(-rr-xx)}=o$, sont essen- « tiellement imaginaires, quelque valeur qu'on « donne à x. »

On voit par cet exposé le dégât que font les imaginaires dans la géométrie. Si à cette dégradation on ajoute celles que les erreurs d'algèbre ci-dessus mentionnées occasionnent dans cette même partie, comment est-il possible de dire que la géométrie et l'algèbre sont dans

un degré de perfection auquel on ne peut rien ajouter? Il s'en faut de beaucoup que la chose soit ainsi. Il y a en algèbre des vices d'organisation que nous avons tenté de déraciner; mais comme les innovations sont sujettes à des contestations, nous n'avons rien trouvé de mieux pour les appaiser, que de proposer aux adversaires les problêmes ci-après à résoudre, que nous accompagnerons de ce dilemme : Ou ils les résoudront, ou ils ne pourront les résoudre; s'ils les résolvent, ils sont en contradiction avec eux-mêmes, puisqu'ils les regardent comme insolubles; s'ils ne peuvent les résoudre, ils seront forcés d'avouer que les principes qui en donnent la résolution, sont préférables à des principes insuffisans qui ne peuvent la donner.

PROBLÊMES A RÉSOUDRE,

proposés aux adversaires des principes contenus dans cet ouvrage.

Ier.

RÉSOUDRE l'équation $yy+xx+rr=0$, en substituant des valeurs numériques à discrétion, aux valeurs littérales.

II.

Extraire la valeur des racines tant littérales que numériques, des expressions $\sqrt{-a^4}$, $\sqrt{-b^8}$, $\sqrt{-144}$, $\sqrt{-4845}$.

III.

Trouver l'inconnue dont la différence de son carré à quatre fois sa valeur donne — 12.

IV.

Trouver un nombre tel que si à son carré on ajoute huit fois le même nombre, le tout fasse — 33.

V.

Trouver la valeur de l'inconnue, de laquelle

ayant soustrait -7, le carré de cette différence soit -16.

VI.

Trouver un nombre tel que si on multiplie sa moitié par son tiers, et qu'au produit on ajoute la moitié du nombre cherché, le résultat soit -30.

VII.

On demande quel est le nombre dont la différence entre son cube et six fois sa valeur est égale à -40?

VIII.

Résoudre l'équation $-x^3 = -6x - 9$.

IX.

Résoudre l'équation $-x^4 = -8x^2 + 8 - 17$.

X.

Résoudre l'équation $-x^5 = -30x^3 + 180x - 275$.

Les problêmes ci-dessus sont réputés insolubles à cause des imaginaires qu'ils renferment, quoique très solubles en faisant usage des nouveaux principes qui n'admettent point de quan-

tités imaginaires. Ces derniers ont donc une supériorité bien décidée sur cet objet; mais si l'on fait attention que *plus on diminue les principes d'une science, plus on leur donne d'étendue*, selon la remarque des éditeurs de l'Encyclopédie, dans l'avertissement qui est à la tête de leur ouvrage, on ne pourra plus douter de l'étendue que l'algèbre doit acquérir par la diminution considérable qui s'est faite des principes vicieux et superflus dont on l'avoit surchargée, puisque les quatre règles de la multiplication ont été réduites à deux, de même que les quatre règles de la division.

Les racines d'une équation composée, dont le nombre étoit illimité, ont été réduites à une seule.

Toutes les racines imaginaires et leurs prétendues propriétés ont été réduites à rien.

Les deux espèces d'exposans et de logarithmes ont été réduites aux seuls exposans et logarithmes positifs.

Des deux signes incompatibles qui précédoient la formule des équations du second degré, un seul a été conservé.

Les multiplicateurs négatifs, de même que les proportions et progressions géométriques alternatives, ont été totalement supprimées.

Toutes ces réductions et suppressions sont autant de barrières rompues qui font rentrer l'algèbre dans l'étendue des domaines dont elle avoit perdu jusqu'à présent la jouissance. Voilà donc des avantages inappréciables que les nouveaux principes procurent à l'algèbre. On peut répéter ici ce qui a été dit à la fin de l'*Exposition du Calcul des quantités négatives.*

Combien de fois a-t-on taxé la nature et l'observateur d'être en défaut, tandis que c'étoit le seul calculateur mal dirigé!

On voit par là l'importance de la matière. Des erreurs qui servent de principes au calcul, intéressent toute la société. Il importe à chaque individu de ne pas errer méthodiquement et par principe. On peut rectifier des fautes d'inadvertance, en comparant l'opération avec la règle; mais lorsque l'opération se trouve conforme aux règles, on agit en conséquence avec une entière sécurité, et croyant être dans le gîte de la vérité, on se trouve malheureusement dans celui de l'erreur.

C'est donc une nécessité indispensable d'avoir recours aux vrais principes et de purger les élémens d'algèbre, les institutions et les cours de mathématiques des erreurs dont nous avons fait précédemment l'énumération, afin d'effectuer la régénération du corps algébrique, dont les principes constitutionnels sont visiblement mauvais.

PROPOSITIONS

démontrées dans le livre de l'Exposition du Calcul des quantités négatives.

I.

Tout produit est de l'espèce de son multiplicande.

II.

Il n'y a point de multiplicateur négatif.

III.

Il n'y a point de proportion géométrique dont les extrêmes soient négatifs et les moyens positifs, ou dont les extrêmes soient positifs et les moyens négatifs.

IV.

Les progressions alternatives ne sont point géométriques.

V.

Le multiplicateur ne fait point partie du produit.

VI.

Le multiplicateur n'est point racine du produit.

VII.

Un produit quelconque n'est composé que d'une seule racine et de ses répliques.

VIII.

Un produit se résout en autant de produits qu'il y a de facteurs.

IX.

Un produit quelconque résulte nécessairement de + par + ou de — par +.

X.

Les carrés négatifs résultent de — par +.

XI.

Aucune quantité ne peut être le produit d'elle-même par elle-même.

XII.

La racine d'un carré négatif est négative.

XIII.

Il n'y a point de racines imaginaires.

XIV.

Il n'y a point d'interruption dans la description des lignes courbes.

XV.

Une quantité positive ne peut devenir négative, et une négative positive, que par voie de soustraction.

XVI.

Les formules du second degré à double signe, comme $\pm\sqrt{25}$, sont fausses.

XVII.

Le quotient d'une division quelconque est essentiellement positif.

XVIII.

Il n'y a point d'exposant négatif.

XIX.

Toute proportion géométrique est composée d'un rapport abstrait et d'un rapport concret.

XX.

Les équations supérieures au premier degré ne sont que des produits.

XXI.

Les équations d'un degré quelconque ne sont composées que d'une seule racine et de ses répliques.

XXII.

Une équation composée peut se résoudre en autant d'équations qu'elle a de facteurs.

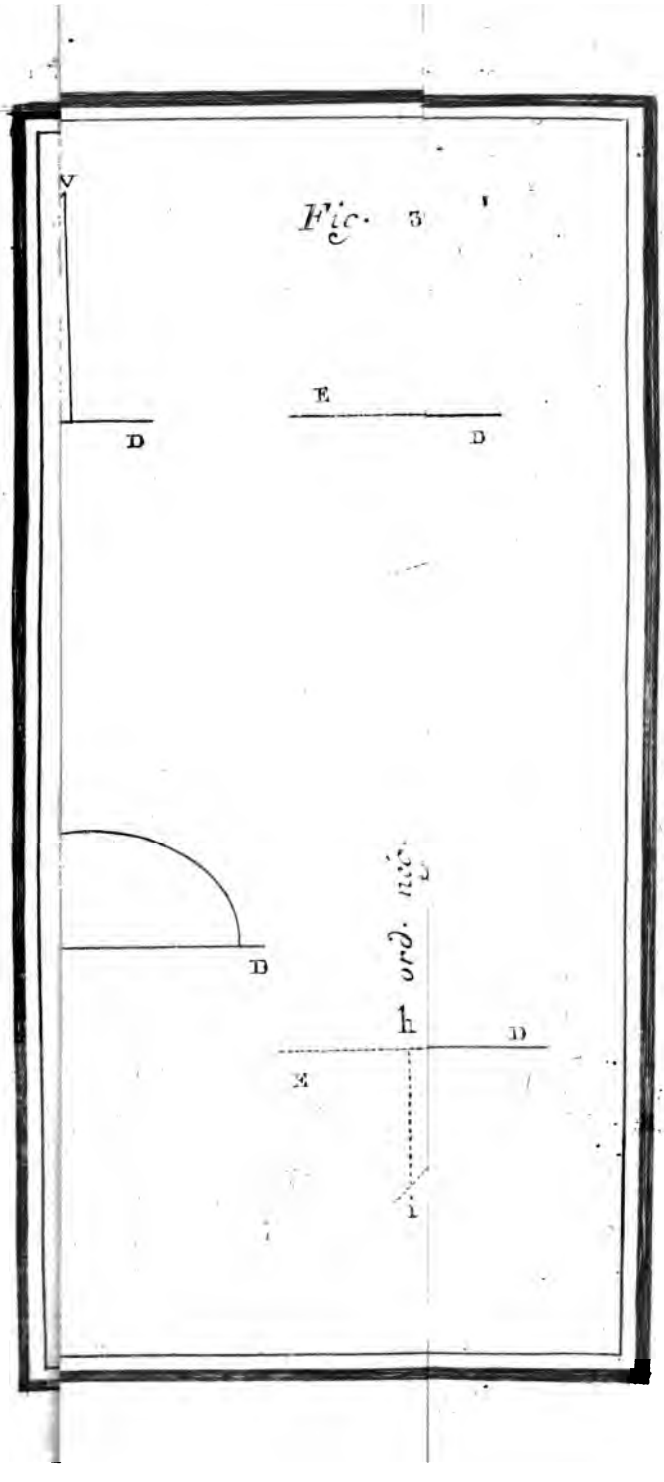
XXIII.

Les ordonnées négatives doivent répondre à des axes négatifs.

XXIV.

La fraction $\frac{0}{0} = 2a$, est une fraction ridicule résultat d'une supposition de quantité à valeur contradictoire.

FIN.


V
Fig. 3
E
D
D
D
ord. rue
D
E

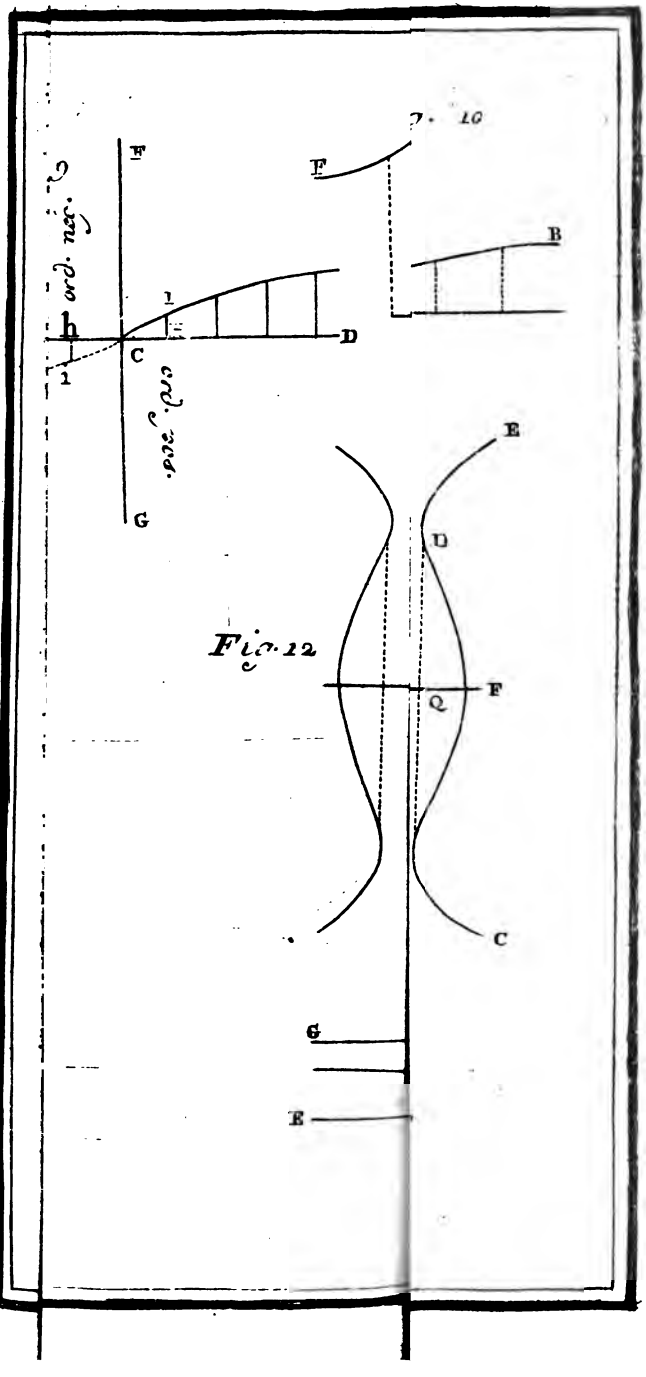


Fig. 12

TABLE

DES MATIÈRES CONTENUES EN CE VOLUME.

Des Equations, page 1
Equations du premier degré, 7
Equations pures du second degré, 22.
Equation pure du second degré dans l'ordre positif, comparée à la même équation dans l'ordre négatif, 34
Equations complètes du second degré, 36
Formule générale pour la résolution des équations complètes du second degré, 41
Problémes du second degré, extraits de l'article équation du Dictionnaire Encyclopédique, première édition, 49
Problémes du second degré, extraits de l'Analyse déterminée de M. Euler, 58
Problémes du second degré, extraits du Cours de Mathématiques de Bézout, à l'usage de la marine, 67
Exemples d'équations fausses du second degré, contenant des excès de maximum, 75

Observations sur l'expression des formules du second degré, page 79
Méthode pour faire évanouir le second terme d'une équation composée, 89
Equations du troisième degré, ordre positif, id.
Observation sur le cas d'exception de la formule, 106
Equations du troisième degré, ordre négatif, 113
Equations du quatrième degré, ordre positif, 120
Equations du quatrième degré, ordre négatif, 125
Equations du cinquième degré, ordre positif, 129
Equations du cinquième degré, ordre négatif, 133
Formule générale pour la résolution des équations de tous les degrés, 137
Application de la véritable algèbre aux lieux géométriques, 138
Problème premier, 143
Problème second, 146
Problème troisième, 149

Problême quatrième, page 152
Problême cinquième, 156
Problême sixième, 159
Problême septième, 167
Problême huitième, 176
Problême neuvième, 189
Récapitulation des erreurs observées dans le calcul ancien et réparées dans le nouveau, 196
Problémes à résoudre, proposés aux adversaires des principes contenus dans cet ouvrage, 228
Propositions démontrées dans le livre de l'Exposition du Calcul des quantités négatives, 233

FIN DE LA TABLE.